OKTATÁSI HIVATAL

NAT 2020

Matematika

tankönyv

6

MATEMATIKA 6.

TANKÖNYV

Oktatási Hivatal

A kiadvány 2021. január 8-tól 2026. augusztus 31-ig tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott a TKV/90-7/2021. számú határozattal.

A tankönyv megfelel a kormány 5/2020. (I. 31.) Korm. rendelete a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet módosításáról megnevezésű jogszabály alapján készült Kerettanterv az általános iskola 5–8. évfolyama számára megnevezésű kerettanterv matematika tantárgy előírásainak.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértő: Kónya István

Tananyagfejlesztők: Paróczay Eszter, Tamás Beáta, dr. Wintsche Gergely

Kerettantervi szakértő és lektor: Hegyi Györgyné, Kulman Katalin

Szaktanácsadó: dr. Csapodi Csaba

Szerkesztette: dr. Wintsche Gergely

Fedélterv: Slezák Ilona, Bánáti János, Orosz Adél

Látvány- és tipográfiai terv: Orosz Adél

Illusztráció: Létai Márton

Szakábrák: Szalóki Dezső

ISBN 978-615-6256-30-0

Oktatási Hivatal • 1055 Budapest, Szalay utca 10–14.
Telefon: (+36-1) 374-2100 • E-mail: tankonyv@oh.gov.hu

A kiadásért felel: Brassói Sándor mb. elnök • Raktári szám: OH-MAT06TA
Tankönyvkiadási osztályvezető: Horváth Zoltán Ákos
Műszaki szerkesztő: Orosz Adél • Grafikai szerkesztő: Téglásy György
Nyomdai előkészítés: Tötösné Gados Zsuzsanna, Gados László
Terjedelem: 28,84 (A/5) ív, tömeg: 565 gramm • 1. kiadás, 2021

A könyvben felhasználtuk Gedeon Veronika, Korom Pál, Számadó László, Urbán Z. János, Wintsche Gergely Matematika 6. című művét. Raktári szám: 503010601/1.

Fotók: 143. o. Fánk (szerzői fotó), 169. o. 2000 Forint (Magyar Nemzeti Bank, Budapest), 174. o. Edelényi kastély (Nemzeti Örökségvédelmi Fejlesztési Nonprofit Kft.), 185. o. Üvegasztal (szerzői fotó), 200. o. Modern játszótér (szerzői fotó)
Shutterstock Képügynökség: 8., 13., 15., 16., 18., 22., 24., 29., 37., 38., 46., 54., 58., 62., 68., 72., 73., 77., 78., 89., 90., 101., 102., 105., 106., 107., 118., 124., 127., 129., 130., 144., 151., 153., 158., 160., 163., 166., 168., 169., 172., 174., 180., 184., 200., 202., 204., 206., 210.
Shutterstock szerkesztői képek (/Shutterstock.com): 168. o. Ralf Siemieniec

Gyártás: Könyvtárellátó Nonprofit Kft.
Nyomta és kötötte az Alföldi Nyomda Zrt., Debrecen
Felelős vezető: György Géza vezérigazgató
A nyomdai megrendelés törzsszáma:

Gratulálunk, már 6. osztályos lettél!

Az új matematikakönyvedet tartod a kezedben.

Minden fejezet elején találsz egy rövid történetet.

4. példa

Jack kapitány Péter kalóza 15 kg, Pál kalóza pedig 10 kg aranyat zsákmányolt a király vámszedőinek hajójáról. A kincset 5 kilogrammonként fadobozokba rakták. Furfangos Jennire bízták a jutalom elosztását. A kapitány 50 tallér jutalmat adott a két kalóznak, amit Jenni a dobozok számának arányában osztott szét. Hány tallér jutalmat kapott a két kalóz külön-külön?

Megoldás

Péter kalóz aranyát 3 dobozba, Pál kalózét 2 dobozba rakták. Jenni az 50 tallért elosztotta a dobozok számával, 5-tel: $50 : 5 = 10$.
A jutalomból 1 dobozra 10 tallér jutott.
Így az egyes jutalmak:

Péter kalóz $3 \cdot 10 = 30$ és Pál kalóz $2 \cdot 10 = 20$ tallér jutalmat kapott.
A két kalóz által gyűjtött kincs aránya: $15 : 10 = 3 : 2$.
A két kalóz által kapott jutalom aránya: $30 : 20 = 3 : 2$.

A két arány megegyezik, tehát Jenni a jutalmat a zsákmány **arányában osztotta** el.

Csoportmunka

Döntsétek el sorsolással, ki lesz az irányító, majd az osztályt bontsátok két csoportra!
Az irányító 1-től kezdve egyesével számol.
Az egyik csoport minden második számnál tapsol.
A másik csoport minden harmadik számnál dobbant.
Figyeljétek meg, mely számoknál volt taps!
Mely számoknál volt dobbantás?
Mely számoknál volt taps és dobbantás is?
Ismételjétek meg a feladatot minden harmadik és minden negyedik számmal is! Találjatok a „zenekar" egyes csoportjaihoz új hangzást!

Az új ismereteket többnyire egy jól érthető példával (sárga alap), esetleg csoportmunkával (kék keret) vagy játékkal (szaggatott piros keret) vezetjük be.

Játékok

Egy-kettő-bumm

Álljatok körbe, és mondjátok a számokat egytől! Az a feladat, hogy a hárommal osztható és a hármat tartalmazó számok helyett „bummot" kell mondanotok. (1, 2, bumm, 4, 5, bumm, 7, 8, bumm, 10, 11, bumm, bumm, 14, bumm stb.) Aki elrontja, leül, a végén az a nyertes, aki utoljára állva marad. Ha valaki kiesik, akkor kezdjétek a számolást elölről! Ha már nagyon jól megy, akkor játsszátok el másik számmal is!

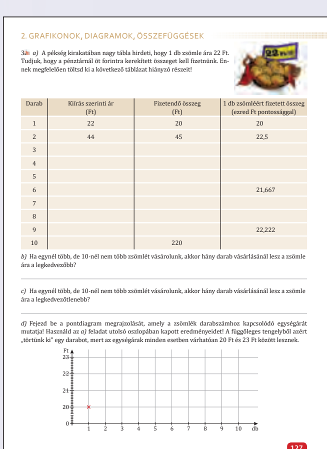
Az otthoni kutatómunkának ajánlott feladatok lehetőséget nyújtanak az önálló felfedezésre.

Kutatómunka

Gyűjts olyan magyar szavakat, amelyek *k*-val kezdődnek, a második mássalhangzójuk *r*, és megfelelő fantáziával kapcsolatba tudod hozni őket a körrel! Fogalmazd meg ezeket az elképzeléseidet! Az indoklásaidat rajzokkal, képekkel is szemléltetheted. A gyűjtést kiterjesztheted olyan szavakra is, amelyekben a *k* helyett *g* szerepel.

Feladatok

1. Véleményed szerint az alábbi mennyiségek közül melyek állnak egyenes arányban egymással?
a) egy ember életkora – tömege;
b) év eleje óta eltelt napok – hetek száma;
c) telefonbeszélgetés hossza – fizetendő összeg;
d) hátizsák tömege – benne lévő füzetek, könyvek száma;
e) életkor – lábméret.

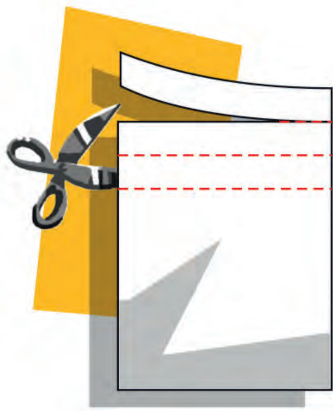


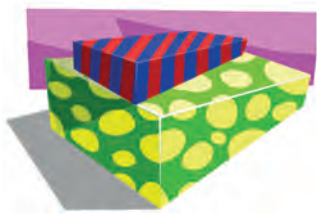
A könyvhöz tartozó munkafüzet példái és játékos feladatai is segítenek a tanulásban.

Minden lecke végén feladatokat találsz. Ezeket nehézségük szerint három csoportba soroltuk:

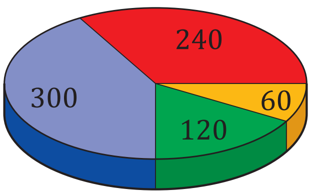
1. könnyű,
2. közepes,
3. kicsit nehéz.

JÓ TANULÁST!






1 öl
1 öl


240
300
60
120

Játék

A dobás joga
Üljetek körbe egy-egy asztalt 4-6 fős csoportokban! Szükségetek lesz asztalonként 1 ceruzára, 1 dobókockára és fejenként egy-egy papírlapra. Minden mást pakoljatok el! Az a cél, hogy leírjad a számokat 1-től 100-ig egyesével a saját lapodra! Egyszerre csak egy ember írhat, a körben a legfiatalabb kezdheti. Rajta kívül mindenki sorban dob egyet a kockával egészen addig, amíg valaki 6-ost dob. Ekkor ő nem szól semmit, csak villámgyorsan kikapja az éppen író kezéből a ceruzát, és elkezdi írni ő a számokat a saját papírjára, az utána következő pedig dob, és így tovább. A saját számsorát mindenki ott folytathatja, ahol korábban abba kellett hagynia. Az nyer, aki először eléri a százat.

Tréfás gondolkodtató feladatok

Tréfás gondolkodtató feladatokkal biztosan találkoztatok már. Az ilyen feladatok nagyon tanulságosak, és úgy maradnak fenn, mint a népmesék, változatos szövegezéssel. Az alábbi feladatokat régen találták ki, sokszor nem ismerjük a szerzőjüket.
Biztosan rá fogsz jönni te is a megoldásokra! Gondolkozz el azon, ami nem megy azonnal, és majd meglátod, milyen örömöt nyújt, amikor magadtól találod ki a megoldást! (A megoldásokat a 80. oldalon találhatod.)

Igazmondók–hazudósok
Dulifuli hétfőn, szerdán és pénteken mindig igazat mond, a hét más napjain mindig hazudik. Ma ezt mondta: „Holnap igazat fogok mondani.” Melyik napon történt ez?

Összeadás
Végezd el gyorsan fejben az összeadásokat!
Vegyél először 1000-et! Adj hozzá 40-et! Megint adj hozzá 1000-et! Majd 30-at. Ismét adj hozzá 1000-et! Most még 20-at. És még egyszer 1000-et. Végül még 10-et.
Mennyit kaptál?

Tréfa
A gyerekek megtréfálják Samut:
Emese azt mondja: „Péter hazudik.”
Péter azt mondja: „Tamás hazudik.”
Tamás azt mondja: „Emese és Péter hazudik.”
Ki mond igazat, ki hazudik? Segítsünk Samunak!

Régi érme
Egy ötvösinas hamisított egy régi érmét. A felirata szerint Kr. e. 126-ban verték. Nagyon szépen sikerült, ezért megpróbálta eladni a piacon. Mennyit kaphat érte, ha minden Krisztus előtti év 1000 forintot ér?

Víz a kútból

Van egy 9 literes és egy 4 literes vödrünk, és egy kút, amiből vizet meríthetünk. Hogyan járjunk el, ha pontosan

a) 5 liter vízre lenne szükségünk;

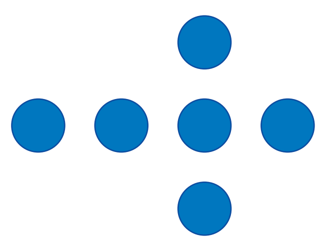
b) 6 liter vízre lenne szükségünk?

A farkas, a kecske és a káposzta

Egy pásztornak át kell vinnie a folyón egy farkast, egy kecskét és egy káposztát. A csónak olyan kicsi, hogy csak a pásztor ülhet bele, és mellé még vagy csak a farkas, vagy csak a kecske, vagy csak a káposzta fér el. Ha azonban a pásztor magára hagyja a farkast a kecskével, vagy a kecskét a káposztával, akkor az egyik megeszi a másikat. Hogyan kelhetnek át a folyón, hogy senkinek ne legyen bántódása?

Korongok

1 korong elmozdításával hogyan érhetnénk el, hogy a középső sorban és oszlopban 4-4 korong legyen?



Csupa csupor

Egy kamrában 7 teli, 7 félig teli és 7 üres mézescsupor van. Oszd el ezeket három medve között úgy, hogy mindegyiknek ugyanannyi csupor és ugyanannyi méz jusson!

Mi a címem?

A Rigó utcában lakom. 8 ház van az utca páros oldalán a keresztutcák között.

A 8 ház számainak összege 1016. A mi házunknak a legnagyobb a házszáma ezek közül. Mi lehet a házszámom?

Hány évesek?

Nagymama, anya és lánya együttesen 136 évesek. Az anya éveinek száma a nagymama éveinek számánál annak egyharmadával kevesebb. Az unoka éveinek száma egyenlő az anya éveinek egyharmadával. Hány évesek külön-külön?

Cukorka

– Hány cukorka van nálatok? – kérdeztük Pétert és Pált.
– Ha a nálunk lévő cukorkák összegéhez hozzáadom a szorzatukat, akkor 14-et kapok.
Hány darab cukorka van Péternél és Pálnál?

Ebéd

Néhányan ebédelni mentek, és le akartak ülni egy asztalnál. Ha minden székre egy ember ül, akkor egynek nem jut hely. Ha kettesével ülnek a székekre, akkor egy szék üresen marad. Hányan mentek ebédelni, és hány szék volt az asztal körül?

Tuaregek és a kincs

Két tuareg vezér poroszkál tevéjén egy oázis felé, ahol hatalmas kincs rejlik. Az oázistól 10 km-re megállnak tanácskozni, és három dologban egyeznek meg. Az első: az oázisban rejlő kincs csak egyvalakié lehet. Második: azé a kincs, akinek a tevéje utoljára ér az oázisba. És még egy harmadik dologban is megegyeznek. Ezek után mindenki felpattan a tevéjére, és ütve hajszolja vágtára az oázis felé. Mi lehetett a harmadik megállapodás?

Osztozkodás

Egy fáradt vándor érkezik teveháton egy házhoz, ahol három fiú tanakodik az örökségük mellett. Megkérdezi a vándor, hogy segíthet-e. Mire azt mondja a legkisebb:
– Édesapánk, a bölcs öreg, 17 tevét hagyott ránk, amin úgy kell osztoznunk, hogy a legidősebb fivérem kapja a tevék felét, a középső fivérem a harmadát, és én a legfiatalabb, kapjam a tevék kilenced részét.
A vándor gondolkodott, majd azt mondta:
– Megoldjuk, fiúk!
Hogyan osztották el a tevéket?

Logisztorik

Vigyázz! Némelyik feladat megoldása becsapós. (Készíts ábrát, rajzot!)

1. Lilla meghívta három barátnőjét a szülinapjára, de egyikük nem tudta, hogy át tud-e menni hozzá. Szeretné a négyzet alakú tortáját három vágással feldarabolni úgy, hogy akár hárman, akár négyen lesznek, mindenképpen igazságosan tudja elosztani a tortát. (Egy vágással keresztül kell vágni a tortát, és csak a három vágás után osztják szét.) Tervezd meg a vágásokat!
2. Ossz el 6 kockacukrot 3 kávéscsészébe úgy, hogy mindegyik csészében páratlan számú cukor legyen!
3. Egy lovas érkezett a szállodához Pénteken. Három napra jött, és a három nap elteltével, Szombaton távozott. Hogyan lehetséges ez?

I. Egész számok, oszthatóság

Judit néni, aki nemcsak a matematika tanára, de az osztályfőnöke is volt a 6. b-nek, mosolyogva nézte a zsongó méhkasra emlékeztető csapatot. Büszke volt a tanítványaira, és nehezen tudta volna letagadni, hogy már nagyon hiányoztak neki.
– Idén is megyünk kirándulni? – kérdezte Panni.
– Mikor indulunk? – türelmetlenkedett Berta, miután Judit néni igenlően bólintott Panni kérdésére.
Várakozó csend támadt, amit az osztályfőnök ki is használt a válaszra.
– Sejthetitek, hogy nem véletlenül találkoztunk az Űrellátó bolt előtt – mosolygott a gyerekekre. – A következő egy hónapban sok munkánk lesz a felkészüléssel. Most az a legfontosabb feladat, hogy körülnézzünk odabent, és összeírjuk, miből mennyire lesz szükségünk az utazás alatt. Körültekintő tervezésre és pontos számításokra van szükség, mert fejenként 16 kilogrammos csomag engedélyezett. Ebbe persze nem számít bele az enni- és innivaló, amit a társaság biztosít a hajón.
Zsombi oldalba bökte Attilát, aki a legjobb barátja volt, és odasúgta neki:
– Akkor a kutyák megint itthon maradnak!
– Esetleg egy zsugorítósugárral lekicsinyíthetnénk őket! – ábrándozott Attila. – Bár, ha lenne olyanunk, akkor a csomagokat is lekicsinyíthetnénk és nem kéne számolgatni!
– De akkor meg arra kellene figyelni, nehogy engem is lekicsinyítsenek.
Összenevettek, de aztán mindketten Judit nénire figyeltek, aki beterelte őket a boltba, és közben ismertette a várható indulási ablakokat.

1. MŰVELETEK AZ EGÉSZ SZÁMOK KÖRÉBEN (MIT TANULTUNK ÖTÖDIK OSZTÁLYBAN?)

A CSMH (Csak Mi Hatodikosok) bátor csapata üldözőbe vette a gonosz AgyTröszt bűnözőcsapatot. Felfedezték a titkos rejtekhelyüket, és megtalálták a páncélszekrényt, ami az ellopott kincseket rejtette. A szekrény feltörhetetlennek bizonyult, így egyetlen esélyük maradt a kinyitásra, hogy megfejtik a számzár ötjegyű titkos kódját. Ahogy a szobában kutakodtak, egyikük alatt megbillent a padló deszkája. A deszka alatt ezt találták:

A számzár kódja:

Rajzolj egy koordináta-rendszert! Indulj az origóból! Válaszd ki az alábbi tizenhárom kérdés mindegyikében a helyes választ, és a mellette álló nyíl iránya szerint lépj egyet-egyet! Képezz az utolsó pont koordinátáiból a sorrendjüket megtartva egy kétjegyű számot, és oszd el ezzel a 930 821-et! Az így kapott ötjegyű szám a páncélszekrény zárjának kódja.

1. Számítsd ki! XXXVII + CLIX – XIV = ?

→ CLXXXII ← CXLXXXII ↑ CCXII ↓ CLXXII

2. Hogyan írjuk helyesen az alábbi összeg eredményét?

2 milliós + 18 százezres + 7 tízezres + 23 ezres + 15 százas + 1 tízes + 7 egyes

→ kétmillió-százkilencvenháromezer-százhatvanhét
← kétmillió-száznyolcvanhétezer-százhatvanhét
↑ hárommillió-nyolcszázkilencvennégyezer-ötszáztizenhét
↓ hárommillió-nyolcszázkilencvenháromezer-ötszáztizenhét

3. Mennyi a következő művelet eredménye? $1011_2 + 111_2 + 1010110_2$

→ 1011000_2 ← 1100110_2 ↑ 1101000_2 ↓ 1101010_2

4. Hány olyan számot találsz a felsoroltak között, melyek tízesre és százasra kerekített értéke megegyezik?

3214, 54 295, 9806, 63 793, 28 504, 98 989

→ 2 ← 3 ↑ 4 ↓ 5

5. Végezd el a következő összeadást! Számítsd ki, mennyit kell az összegből elvenni, hogy 12 345-öt kapjunk! 3987 + 512 + 37 + 10 203 + 9

→ 2383 ← 2393 ↑ 2403 ↓ 2413

6. Juci bal zsebében 1200 Ft, jobb zsebében 2300 Ft van. A pénztárcájában van egy ötezres és két ötszázas, apróban pedig három kétszázas és egy ötvenes. Mennyivel több a pénze 10 000 Ft-nál?

→ 150 Ft-tal ← 250 Ft-tal ↑ 130 Ft-tal ↓ 50 Ft-tal

7. Számítsd ki, melyik szorzat értéke a legkisebb!

→ 2436 · 25 ← 1218 · 50 ↑ 609 · 100 ↓ 608 · 100

8. Az iskolaudvarra kivonult 720 diák, az iskola összes tanulója. 24 gyerek állt minden sorban. Hány sorban álltak a felsősök, ha tudjuk, hogy 312 alsós diák van?

→ 17 ← 16 ↑ 18 ↓ 19

9. Az alábbi műveletsorok között kettőnek azonos a végeredménye. Válaszd ki ezt az eredményt a lent felsoroltak közül!

51 – 4 · 9 + 18 : 3 84 : 7 + 13 · 6 – 68 103 + 102 : 6 – 9 · 11 21 · 5 : 7 + 96 : 12

→ 21 ← 22 ↑ 23 ↓ 24

10. A 24 órás Matek Gigamaratonra 128 gyerek jelentkezett. A szervezők csokit vásároltak, hogy a fáradt gyerekek könnyebben túllendüljenek a holtpontokon. Egy ládában 3 doboz, egy dobozban 32 szelet csoki volt. Hány darab csoki jutott egy jelentkezőnek, ha 8 ládával vásároltak a szervezők?

→ 8 ← 7 ↑ 6 ↓ 5

11. Állítsd növekvő sorrendbe a következő számokat! Melyik szám lett a középső?

–4; |–8|; –(–5); 2; |+7|; –(+8); +6; +(–3); –|9|

→ +(–3) ← 2 ↑ –(–5) ↓ |–8|

12. Számold ki a következő művelet eredményét! 8 – 17 + 13 – 21 – 7 + 31 – 19

→ 6 ← (–9) ↑ (–2) ↓ (–12)

13. Az alábbi műveletek végeredményei között vannak egyenlők. Határozd meg, hány ilyen van!

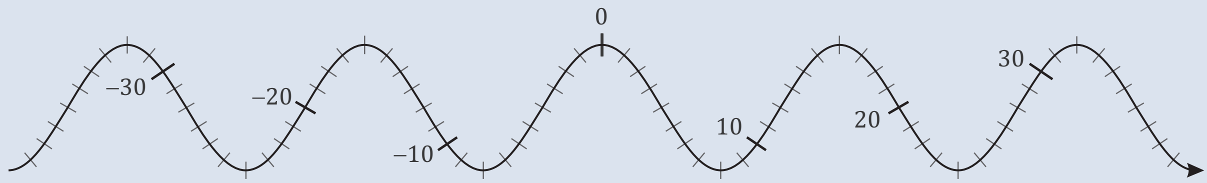
(+15) – (–7) (–13) + (+ 9) (+7) + (–11) (–6) – (–10) (+5) – (+9)

→ 1 ← 2 ↑ 3 ↓ 4

2. AZ EGÉSZ SZÁMOK SZORZÁSA

Játék

A játékot ketten játsszátok. A játékhoz szükségetek lesz két különböző értékű pénzérmére és két bábura. Rajzoljatok egy lapra ahhoz hasonló számegyenest, mint amilyet az ábrán láttok!



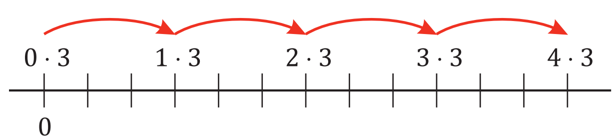
Válasszatok egy 6-nál kisebb pozitív egész számot! A leírt példában ez a szám a 3.

A játék menete: Helyezze el mindkét játékos a számegyenes 0 pontjánál a saját bábuját! Az egyik pénzérmén a fej legyen a pozitív, az írás legyen a negatív irány! A másik pénzérmén a fej jelentse az 1-et, az írás a 2-t! Az egyik játékos dobjon mindkét pénzérmével, és attól függően lépjen negatív vagy pozitív irányba, hogy az első érmével fejet vagy írást dobott. A második pénzérme azt mutatja meg, hogy 3-nak hányszorosát lépje a számegyenesen.

Például: ha az egyik játékos az első pénzérmén írást, a másodikon fejet dob, akkor negatív irányba lép háromszor 1-et, így a –3-ba jut. Utána a másik játékos dob és lép a leírtaknak megfelelően. Mindkét játékos onnan folytassa a lépéseket, ahol állt! 5-5 dobás után az nyer, aki a kisebb számon áll. Válasszatok a 3 helyett egy másik számot, és játsszatok új játékot!

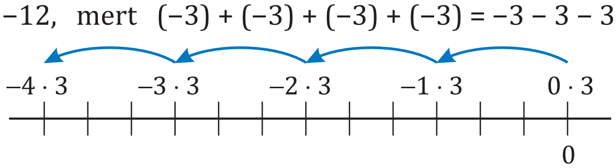
Pozitív egész számokat már össze tudunk szorozni. 0-val is tudunk szorozni, mert tudjuk, hogy 0-nak bármelyik többszöröse 0.

$$4 \cdot 3 = 12, \quad \text{mert} \quad 3 + 3 + 3 + 3 = 12$$



Hasonlóan értelmezzük negatív és pozitív szám szorzatát is.

$$4 \cdot (-3) = -12, \quad \text{mert} \quad (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -3 - 3 - 3 - 3 = -12$$



CSOPORTMUNKA

Válasszatok egy tanulót, aki a számolást irányítja! Ő fogja mondani annak a nevét, akinek folytatnia kell a sorozatot.
Bővítsétek negatív egész számok felhasználásával az ötös szorzótáblát! Induljatok a $10 \cdot 5 = 50$-ről, és számoljatok csökkenő sorrendben $(-10) \cdot 5 = (-50)$-ig!
Ismételjétek meg a kilences szorzótáblával $10 \cdot 9$-től csökkenő sorrendben $(-10) \cdot 9$-ig!

Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat!

a) $3 \cdot (-3) = -9$
$2 \cdot (-3) = -6$
$1 \cdot (-3) = -3$
$0 \cdot (-3) = 0$
$(-1) \cdot (-3) = 3$
$(-2) \cdot (-3) = 6$
$(-3) \cdot (-3) = 9$

b) $3 \cdot (-5) = -15$
$2 \cdot (-5) = -10$
$1 \cdot (-5) = -5$
$0 \cdot (-5) = 0$
$(-1) \cdot (-5) = 5$
$(-2) \cdot (-5) = 10$
$(-3) \cdot (-5) = 15$

Megfigyelhetjük az alábbiakat:

I. Ha egy negatív számot megszorzunk egy számmal, majd egy nála kisebb számmal, akkor a szorzat értéke nő.
II. Ha negatív számot szorzunk pozitív számmal, akkor negatív számot kapunk.
III. Ha negatív számot szorzunk 0-val, akkor 0-t kapunk.
IV. Ha negatív számot szorzunk negatív számmal, akkor pozitív számot kapunk.

Válassz egy negatív egész számot, készíts a fentiekhez hasonló sorozatot, és figyeld meg, hogy a felsorolt állítások erre a sorozatra is igazak-e!

1. példa

Egy repülőgép másodpercenként 4 m-t süllyed a leszállás megkezdésekor. A pilóta tájékoztatja az utasokat a repülőgép ereszkedésének tényéről és a legfontosabb tudnivalókról.

a) Hány métert süllyed a repülőgép 2 perc alatt?

Amíg a pilóta elmondta a tájékoztatást, 25 másodperc telt el.

b) Hány méterrel volt magasabban a repülőgép az információközlés megkezdésekor a befejezéséhez képest?

Megoldás

a) A lefelé irányuló mozgást negatívnak tekintjük.
2 perc = 120 másodperc, a $(-4) \cdot 120$ értékét kell meghatároznunk.
Az 1. példa előtt leírtak alapján $(-4) \cdot 120 = -480$.
A repülőgép 480 métert süllyedt 2 perc alatt.

b) Egy adott időponthoz képest a 25 másodperccel korábbi időpontot jellemezzük negatív számmal.
Ekkor a $(-4) \cdot (-25)$ értékét kell kiszámolni.
Korábban a gép magasabban volt a későbbi időponthoz képest, ezért a szorzat értéke pozitív szám lesz.
$(-4) \cdot (-25) = (+100)$
A gép 25 másodperccel korábban 100 m-rel magasabban volt.

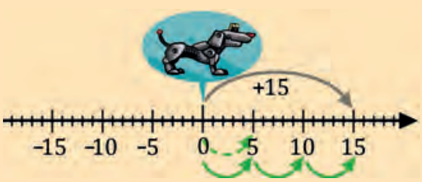
2. AZ EGÉSZ SZÁMOK SZORZÁSA

2. példa

Robokuty a számegyenes nulla pontján áll, és a szorzatok értékeinek megfelelően halad jobbra vagy balra. A szorzat második tényezője azt mutatja, hogy mennyit lépjen, az első tényező pedig azt, hogy hányszor. Ha az első tényező pozitív, akkor megtartja az indulási irányát, ha negatív, akkor ellentétesen megy az indulási irányhoz képest.
Robokuty a számegyenes mely pontjába érkezik az alábbi szorzatok esetén?

a) $(+3) \cdot (+5)$ *b)* $(+3) \cdot (-5)$ *c)* $(-3) \cdot (+5)$ *d)* $(-3) \cdot (-5)$

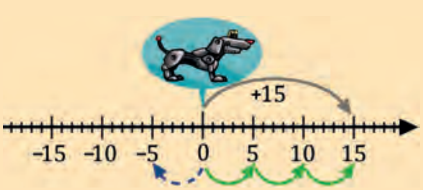
Megoldás



a) A (+5) tényező hatására Robokuty a számegyenesen 5-öt lépked pozitív irányba. A (+3) tényező pozitív előjele azt jelenti, hogy ne módosítson az eredeti irányon, a megegyező (tehát pozitív) irányba menjen ötösével 3-szor. Robokuty 15-öt lép pozitív irányba, vagyis a (+15)-höz ér.

b) A (–5) tényező negatív előjele azt jelenti, hogy a számegyenesen negatív irányba induljon, és lépjen 5-öt. A (+3) tényező pedig azt, hogy módosítás nélkül, tehát a megegyező (negatív) irányba lépjen ötösével 3-szor.
Robokuty 15-öt lép negatív irányba, vagyis a (–15)-höz ér.

c) A (+5) tényező pozitív előjele azt jelenti, hogy a számegyenesen induljon el pozitív irányba, de a (–3) tényező negatív előjele miatt az eredeti pozitív irány módosul, negatívvá válik, ezért az ellentétes (tehát negatív) irányba kell lépnie ötösével 3-szor. Robokuty 15-öt lép negatív irányba, vagyis a (–15)-höz ér.



d) A szorzatban a (–5) azt jelenti, hogy a számegyenesen lépjen 5-öt negatív irányba. A (–3) tényező pedig azt, hogy az eredeti negatív irányon módosítson, vagyis ellentétes (tehát pozitív) irányba haladjon, 3-szor lépdeljen ötösével.
Robokuty 15-öt lép pozitív irányba, vagyis a (+15)-höz ér.

Összefoglalva a lehetőségeket:

$(+3) \cdot (+5) = (+15) \quad = \quad (-3) \cdot (-5) = (+15)$

$(-3) \cdot (+5) = (-15) \quad = \quad (+3) \cdot (-5) = (-15)$

PÁROS MUNKA

A 2. példában cseréljétek fel a szorzótényezőket, és rajzoljátok le, hova jutott Robokuty. Egyeztessétek az eredményeket! Mit tapasztaltatok? A szorzótényezők felcserélhetők?

Két azonos előjelű szám szorzata pozitív, két különböző előjelű szám szorzata negatív lesz.

Ha egy számot (–1)-gyel szorzunk, akkor a szám **ellentettjét** kapjuk.
Például: A (+5) ellentettje a $(-1) \cdot (+5) = (-5)$. A (–3) ellentettje a $(-1) \cdot (-3) = (+3)$.

Feladatok

1. A bátor Szöcske mindig létrán ugrál le kedves Vakond barátjához, ha az vendégségbe hívja. Ha kettesével ugrál lefelé a létrafokokon, akkor 10 ugrással ér le. Számolás közben használj negatív számokat! Tekintsd a lefelé irányuló mozgást negatívnak és a föld szintjét 0-nak!

a) Milyen mélyen lakik Vakond, ha tudjuk, hogy két létrafok közötti távolság 10 cm?

b) A föld alatt 4 létrafokkal Szöcskének eszébe jutott, hogy az ajándékcsomagját fent hagyta. Mennyivel volt magasabban az induláskor?

c) Hány ugrással ér le, ha négyesével szökdel lefelé a létrafokokon?

2. Határozd meg az alábbi számok ellentettjét és abszolút értékét!

a) (–1) *b)* (–34) *c)* 7 *d)* (–7) *e)* 0

3. Számold ki a szorzatokat!

a) (+1) · (+23) *b)* (+3) · (–15) *c)* (–12) · (+4) *d)* (–8) · (–11)
e) (–1) · (+3) · (+7) *f)* (–2) · (–3) · (+4) *g)* (–9) · (–8) · (–7) *h)* (+2) · (–57) · (+5)
i) (+4) · (–17) · (–25) *j)* (–91) · 0 · (+28)

4. Állítsd növekvő sorrendbe a felsorolt szorzatokat! Vedd a magyar ábécében a betűjelük után következő betűt! Ha összeolvasod ezeket, akkor egy értelmes szót kapsz! Ismered ezt a szót? Ettél már ilyet?

Í	H	F	Á	K	D
(+1) · (+8) · (–2)	(–24) · (–5)	(+7) · (+8)	(–4) · (+14)	(–3) · (+8) · (–3)	(+12) · (–4)

5. Végezd el a szorzásokat! Ha ügyesen csoportosítod a szorzótényezőket, akkor könnyebb lesz!

a) (–17) · (+20) · (–10) · (+50) *b)* (+25) · (–42) · (–40) · (+20)
c) (–32) · (–125) · (–10) · (+8) *d)* (–14) · (–4) · (–35) · (–25)

6. Végezd el a következő műveleteket!

a) (–11) · (+4) + (–8) · (–3) *b)* (–23) · (+2) – (–5) · (–5 – 7)
c) (+123) · (–2) + (38 + 19) · (–9) *d)* (–22 + 9) · (–6) · (–2) – (+5) · (–15)

7. A 320 °C-os kemencét hajnali 4 órakor Kis Bence kikapcsolta. A kemence hőmérséklete a kikapcsolás utáni 6 órában átlagosan óránként 47 °C-kal csökkent.

a) Hány fokos lett a kemence délelőtt 10 órára?

b) Ki lehet-e számolni, hogy reggel 7-kor hány fokos volt? Válaszodat indokold meg!

8. A 32 éves Bence egy tálcára 6 sorban 8-8 zsömlét tesz, és egyszerre 5 tálca zsömlét süt. 2 óra alatt hány zsömlét készíthet, ha 30 percenként készül el egy adaggal?

3. AZ EGÉSZ SZÁMOK OSZTÁSA

1. példa

Egy négylakásos társasház új kaputelefon-rendszert vásárolt részletre. Már csak az utolsó részletet kell kifizetniük, 28 640 Ft-ot. Mennyi tartozása van egy-egy lakásnak, ha a költséget lakásonként egyenlő részekre osztották?

Megoldás

Az tartozást negatív számmal jellemezzük, ezért az egy lakásra jutó tartozás is negatív lesz.
(–28 640) : (+4) = (–7160)
Az egy lakásra jutó tartozás 7160 Ft.

2. példa

A Földünket körülvevő légkör hőmérséklete körülbelül 12 km magasságig 600 m-ként 4 °C-kal egyenletesen csökken.
2000 méter magasságban 0 °C-ot mértek.
Hány méterrel van magasabban 2000 méternél az a hely, ahol –28 °C a hőmérséklet?

Megoldás

A hőmérséklet 600 méterenként 4 °C-kal csökken. Azt kell kiszámolnunk, hogy a –28 °C hányszor 4 °C csökkenéssel érhető el. Eközben a magasság növekedik, tehát a kapott érték pozitív lesz.
(–28) : (–4) = 7, ezért 7 · 600 = 4200 méterrel magasabban lesz –28 °C a hőmérséklet.
2000 méter fölött 4200 méterrel, azaz a Föld felszínétől 6200 méter magasságban lesz a hőmérséklet –28 °C.

3. példa

Robokuty a számegyenes 0 pontján áll, és a következő hányadosoknak megfelelően kell haladnia. Döntsük el, hová kell lépnie Robokutynak az egyes esetekben!

a) (+15) : (+5) *b)* (+15) : (–5) *c)* (–15) : (+5) *d)* (–15) : (–5)

Megoldás

a) (+15) : (+5) = ◇; azaz keressük azt a számot, amelyre (+15) = ◇ · (+5).
Ez a szám a (+3). (+15) : (+5) = +3. Robokutynak a számegyenes (+3) pontjára kell lépnie.

b) (+15) : (–5) = ▭; azaz keressük azt a számot, amelyre (+15) = ▭ · (–5). Az előző leckében megtanultuk, a keresett szám a (–3), mert (+15) = (–3) · (–5). (+15) : (–5) = –3.
Robokutynak a számegyenes (–3) pontjára kell lépnie.

c) $(-15) : (+5) = \square$; azaz keressük azt a számot, amelyre $(-15) = \square \cdot (+5)$. Az előzőhöz hasonlóan ez a szám a (-3), mert $(-15) = (-3) \cdot (+5)$. $(-15) : (+5) = -3$.
Robokutynak ismét a számegyenes (-3) pontjára kell lépnie.

d) $(-15) : (-5) = \triangle$; azaz keressük azt a számot, amelyre $(-15) = \triangle \cdot (-5)$. Az előzőhöz hasonlóan ez a szám a $(+3)$, mert $(-15) = (+3) \cdot (-5)$. $(-15) : (-5) = +3$.
Robokutynak ismét a számegyenes $(+3)$ pontjára kell lépnie.

Összefoglalva a lehetőségeket:

$(+15) : (+5) = (+3)$	=	$(-15) : (-5) = (+3)$
$(-15) : (+5) = (-3)$	=	$(+15) : (-5) = (-3)$

Két azonos előjelű szám hányadosa pozitív, két különböző előjelű szám hányadosa negatív lesz.

Az osztó nem lehet 0. Ha a 0-t osztom valamely nemnulla számmal, akkor a hányados mindig 0.
$0 : (-7) = 0$, mert $0 \cdot (-7) = 0$.

Ha egy műveletsorban több szorzás és osztás szerepel, akkor azokat balról jobbra haladva sorban végezzük el.

4. példa

Számoljuk ki a következő műveletsorok eredményét!

a) $(-25) \cdot (+9) : (-15)$
b) $(-39) \cdot (+45) : (-13) : (-15) \cdot (-2)$
c) $(+99) \cdot (-8) : (-11) : (+6) \cdot (-1)$

Megoldás

Balról jobbra hajtjuk végre a műveleteket.

a) Először a szorzást végezzük el: $(-25) \cdot (+9) = (-225)$, majd az eredményt elosztjuk (-15)-tel. $(-225) : (-15) = (+15)$.

b) $(-39) \cdot (+45) = (-1755)$; $(-1755) : (-13) = (+135)$; $135 : (-15) = (-9)$; $(-9) \cdot (-2) = (+18)$.

c) $(+99) \cdot (-8) = (-792)$; $(-792) : (-11) = (+72)$; $72 : (+6) = (+12)$; $12 \cdot (-1) = (-12)$.

A példa alapján látható, hogy ha a szorzás-osztás sorozatban páros számú negatív szám van, akkor az eredmény pozitív, ha pedig páratlan számú negatív szám, akkor az eredmény negatív.

Feladatok

1. Határozd meg a hányadosok értékét!

a) $(-6) : (+1)$	*b)* $(-13) : (-1)$	*c)* $(-96) : (+32)$	*d)* $(+72) : (-4)$
e) $(-63) : (-3)$	*f)* $(+77) : (+7)$	*g)* $(-625) : (-25)$	*h)* $(-91) : (-7)$

2. *a)* A hőmérséklet 12 °C-kal lett hidegebb 4 óra alatt. Ha minden órában ugyanannyival hűlt, akkor egy óra alatt mekkora volt a változás?

b) A tengeralattjáró –300 méteren lebeg, majd gyakorlás céljából négy egyenlő szakaszban a felszínre emelkedik. Milyen mélységeken fog tartózkodni az egyes emelkedési szakaszok után?

c) Emil és öt barátja elmentek a sarki kaszinóba, hogy meggazdagodjanak. Sajnos a terv nem vált be, mert 4200 euró veszteségük lett az este végére. Mennyi adósságuk lett fejenként Emiléknek?

3. Figyeld meg az alábbi műveleteket! Számolás nélkül döntsd el a lenti állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis!

(+527) : (–17)   (–855) : (+19)   (+976) : (+16)   (–1134) : (–18)

a) Minden végeredmény negatív szám.
b) A végeredmények közül legalább az egyik pozitív szám.
c) Minden műveletnél meg tudok változtatni pontosan egy előjelet úgy, hogy az összes eredmény pozitív szám legyen.
d) A végeredmény minden műveletnél változatlan marad, ha az osztandót és az osztót is (–2)-vel megszorozzuk.

4. Mely hányadosok abszolút értéke 12?

a) (–144) : (+12)   *b)* (–52) : (+4)   *c)* (–60) : (–5)   *d)* (+48) : (–4)
e) (–96) : (–8)   *f)* (+12) : (+1)   *g)* (–24) : (–2)   *h)* (–192) : (–16)

5. Számítsd ki a műveletek eredményét!

a) (–1) : (–1) : (–1)   *b)* (–100) : (–4) : (–5)   *c)* (–312) : (–6) : (+4)
d) 0 : (+5) : (–6)   *e)* |(–40) : (–5)| *f)* |(–288) : (–4) : (–8)|

6. Brútusz elvégzett hat műveletet. Ha mind a hat eredménye helyes, ötöst kap.

a) Hányast adnál Brútusznak?
b) Hallottál más órán Brútusz (Brutus) nevű személyről?

(–13) : (–1) = –13   (+12) : (–4) = –3   (–98) : (–14) = –7
(–111) : (–3) = +39   (+54) : (–27) = –2   (–72) : (–12) = 6

7. Végezd el a következő műveleteket!

a) (–24) : (+8) + (+119 – 29) : (–5)   *b)* (+56) : (–7) – (–108) : (–17 + 14) : (–2)
c) (–136) : (+5 – 13) – (+209) : (–11)   *d)* (–72) : (–4) : (–2) + (–27 – 78) : (–15)

8. *a)* Válaszd ki, melyik nagyobb az alábbi műveletsorok végeredménye közül! Rakd megfelelő sorrendbe az előttük álló szótagokat úgy, hogy egy értelmes szót kapj! Ha nem ismered ezt a szót, nézz utána a jelentésének!

b) A maradék négy szótagból is össze tudsz rakni egy értelmes szót?

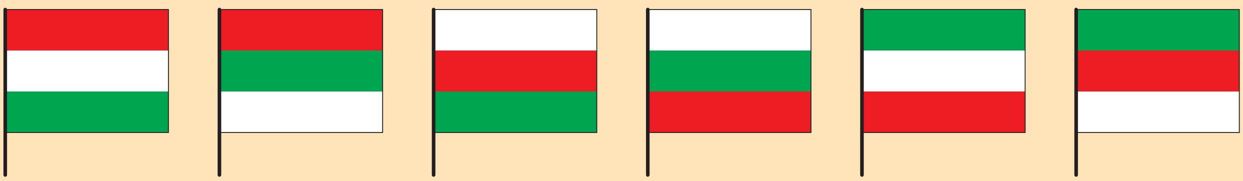
POSZ)	(–35) : (+7) · (–2)	vagy	RE)	(+55) : (–11) · (–1)
PÜ)	(+52) : (–13) · (+3)	vagy	FÉ)	(–12) · (–3) : (–6)
ŰR)	(+81) · (–2) : (–9) · (–1)	vagy	TRO)	(–21) · (–5) : (+7) : (–1)
RA)	(+12) · (–8) : (–6) : (+4)	vagy	LŐ)	(–24) · (+7) : (+8) : (–21)

1. példa

Egy piros, egy fehér és egy zöld szalagból háromszínű lobogót varrunk fel egy zászlórúdra. Hányféle zászlót készíthetünk, ha mindegyik csíkból csak egyet használunk a zászlóhoz? Soroljuk fel az összes lehetőséget! Nézz utána, hogy az így kapott zászlók közül melyik ábrázolja valamely ország zászlóját!

Megoldás

A felsorolást készítsük el színezéssel! Ha a felső csík piros, akkor a középső és alsó csík fehér és zöld, vagy zöld és fehér. Ugyanígy végiggondolva, ha a felső csík fehér, akkor az alatta lévő két szín piros és zöld, vagy zöld és piros. Ha legfelül zöld van, akkor alatta fehér és piros, vagy piros és fehér szín lehet.



Ha tárgyakat, számokat kell sorba rendeznünk, akkor figyelnünk kell arra, hogy
- megtaláltunk-e minden esetet,
- minden lehetőséget csak egyszer számoltunk-e.

Célszerű mindig valamilyen rendszer szerint elvégezni az összeszámlálást. Az első példában a színezés során megvizsgáltuk, hogy ha egy adott szín van legfelül, milyen lehetőségek maradtak a további helyekre.

2. példa

Az 1, 4, 5, 9 számkártyákból hány négyjegyű számot tudunk készíteni úgy, hogy minden számjegyet csak egyszer használunk fel?

Megoldás

Első módszer:
Írjuk fel nagyság szerint növekvő sorrendben a négyjegyű számokat!
Akkor lesz a négyjegyű szám a legkisebb, ha a legkisebb számkártyát tesszük az ezresek helyére. Ez az 1. Ha az ezres helyiértéken 1 áll, akkor a százas helyiértéken 4 lesz: 14 _ _.
A képezhető számok 1459 és 1495.

Most a százasok helyére kerüljön az 5, ekkor az 1549, 1594 számok készíthetők.
Végül a százasok helyére kerüljön a 9! Ekkor az 1945 és 1954 számok alkothatók.

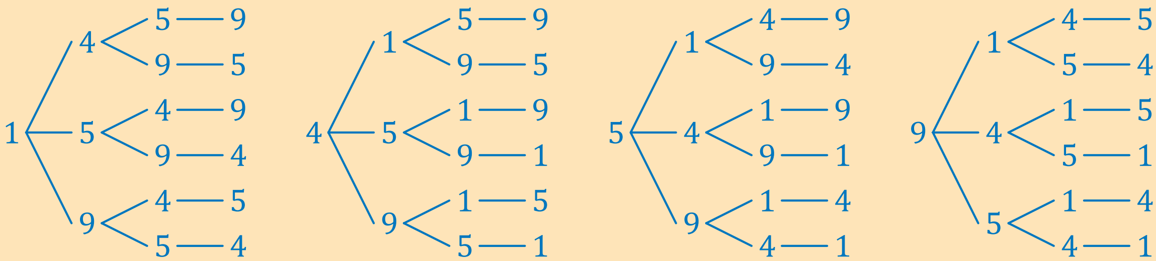
Hasonló módon írhatjuk fel a 4-gyel, 5-tel, 9-cel kezdődő számokat.

1459, 1495, 1549, 1594, 1945, 1954	6 db
4159, 4195, 4519, 4591, 4915, 4951	6 db
5149, 5194, 5419, 5491, 5914, 5941	6 db
9145, 9154, 9415, 9451, 9514, 9541	6 db

Ez összesen 24 szám.

Második módszer:

A számok felsorolását, összeszámlálását egy ábra segíti:



Az ábra szétágazása miatt ezt az ábrázolási módot ágrajznak vagy fagráfnak nevezzük.

Készíthetjük más irányú elágazásokkal is, most a vízszintes elágazás volt a legjobban használható.

Előnye, hogy alkalmazhatjuk akkor is, ha nem számokat képezünk.

Harmadik módszer:

A felsorolás nem minden esetben lehetséges, mert ha túl sok eset van, azt nagyon hosszadalmas leírni. Az esetek felírása helyett összeszámoljuk, hogy egy adott helyen, ebben a feladatban adott helyi értéken, hányféle szám lehet.

Jelöljük ki a számok helyét:

Balról az első helyre a négy számkártya bármelyikét tehetjük, ez négy lehetőség.	Balról a második helyre nem tehetjük azt, amit az első helyre írtunk, így három lehetőségünk maradt.	A harmadik helyre már csak a maradék kétféle szám közül választhatunk.	Az utolsó helyre már csak egy lehetőség maradt.
4	3	2	1

Az első két helyre összesen $4 \cdot 3 = 12$-féleképpen rakhatjuk le a számkártyákat.

Az első három helyre $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$-féleképpen tehetünk számkártyát.

A képezhető négyjegyű számok száma $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

3. példa

Az 1, 4, 5, 9 számkártyák felhasználásával hány

a) kétjegyű, *b)* háromjegyű szám készíthető?

Megoldás

a) A tízes helyi értékre 4-féle számkártya választható, az egyes helyi értékre már csak 3. Így összesen $4 \cdot 3 = 12$ kétjegyű szám készíthető. Ezek: 14; 15; 19; 41; 45; 49; 51; 54; 59; 91; 94; 95.

b) Az előző gondolatmenethez hasonlóan $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ háromjegyű szám készíthető. Írjátok le a 24 különböző háromjegyű számot a füzetetekbe!

Feladatok

1. Hányféle különböző sorrendben lehet megenni a krémes, almás pite, mákos rétes desszerteket?

2. Janka nagyon büszke arra, hogy minden reggel egyedül adja rá a kistestvérére a pólóját, a nadrágját és a két zokniját. Hány napig tudja különböző sorrendben ráadni ezt a négy ruhadarabot?

3. Egy reggelizőhelyen háromféle módon elkészített tojást lehet rendelni: főtt tojást, tükörtojást és rántottát. Hozzávalóként négyfajta pékáruból választhatunk: teljes kiőrlésű kifli, rozsos zsemle, fehér zsemle, sós kifli.
Peti nagyon szereti a tojást minden formában. Sorold fel, hányféleképpen kérhet tojást és pékárut úgy, hogy a választott párosítása az előzőektől különböző legyen?

4. Luca, Adél, Dóri és Panni színházba mentek este. A 9. sorban az 5-ös, 6-os, 7-es, 8-as helyekre szólt a jegyük.
a) Hány különböző sorrendben ülhettek le a lányok?
b) Hány különböző esetben ülhetett Dóri az 5-ös széken?
c) Hány különböző esetben ülhetett Adél Luca mellett?
d) Hány különböző esetet tudsz megszámolni akkor, ha tudod, hogy Dóri nem ült Panni mellé?

5. Berta meg akarja látogatni Szofit Kétegyházán, de közben be kell ugrania Gyulán a nagymamához. Békéscsabáról autóval, vonattal, busszal vagy biciklivel mehet Gyulára, de onnan Kétegyházára továbbmenni csak autóval, busszal vagy biciklivel érdemes. Hányféle módon teheti meg az utat Békéscsabáról Kétegyházára?

6. A Formula-1-es versenyen 16 autó indult. A verseny során 6 versenyző műszaki hiba miatt, 2 induló baleset miatt kiesett, és további 2 versenyzőt szabálytalanság miatt kizártak.
a) Hányféle sorrendben futhattak be a versenyben maradt autók?
b) Hányféle sorrendben alakulhatott az első három hely sorsa?

7. A Brazíliában megrendezett 2014-es labdarúgó-világbajnokságon 32 csapat vett részt. A csapatokat 8 négyes csoportba sorsolták. Az azonos csoportba került csapatok körmérkőzést játszottak egymással. (A csoporton belül mindegyik csapat egy mérkőzést játszott az összes többi csapattal.) A csoportokból az első két helyezett csapat jutott tovább, a másik két csapat kiesett. A továbbjutó 16 csapat kieséses rendszerben játszott tovább. (A továbbjutó csapatokat párokba sorsolták, és az egy párba került két csapat játszott egymás ellen. A mérkőzések vesztesei kiestek, a győztesek továbbjutottak. Ezt egészen a végső győztes kiválasztásáig folytatták.)
a) Hány mérkőzést játszott az a csapat, amelyik nem jutott tovább a csoportjából?
b) Hány mérkőzést játszott a győztes Németország csapata?
c) Hány csapat játszott pontosan 5 mérkőzést?
(Felvételi feladat, 2015)

8. Hány olyan háromjegyű szám van, amelynek csak a tízes helyiértékén áll páratlan szám?

9. Az öt szuperhős (Légyember, Thorma, Rézember, Halk és Sasszem) elmentek moziba, hogy megnézzék a róluk készült filmet. Szerencséjük volt, mert éppen üres volt a 8. sorban mind az öt hely, így oda kértek jegyet. Sorold fel, hogyan ülhettek egymás mellé a moziban, ha Légyember Rézember mellett akart ülni, Halk azt akarta, hogy az egyik oldalán ne üljön senki, Sasszem pedig semmiképp sem akart Thorma mellett helyet foglalni!

10. Nagyi sétálni indult az öt unokájával. Mosolyogva látta, hogy már mindannyian egyedül is fel tudják venni a kabátjukat. Ahogy a tükörben megpillantotta magukat azt is megállapította, hogy 5 kabát kivételével mindegyik fehér, 4 kabát kivételével mindegyik piros, és 3 kabát kivételével mindegyik zöld. Egyesével léptek ki az ajtón, de gondosan ügyeltek arra, hogy csak különböző színű kabátot viselők haladjanak egymás mögött.
a) Hányan viseltek piros, hányan fehér és hányan zöld kabátot?
b) Sorold fel, milyen sorrendben állhattak egymás mögött!

11. Három gyerek között szeretnék egy málnás és egy epres nyalókát szétosztani. Hányféleképpen tehetem meg, ha
a) egy gyerek csak egy nyalókát kaphat?
b) egy gyerek kaphat két nyalókát is?

12. Három gyerek között szeretnék szétosztani két almás, egy körtés és egy citromos cukorkát úgy, hogy minden gyerek legalább egy, de legfeljebb 2 cukorkát kapjon.
a) Sorold fel a lehetőségeket!
b) Mennyivel lesz kevesebb lehetőségem, ha a citromos helyett is körtés cukorkát adok?

13. Misiék csapata (Misi, Nándi, Kinga, Bogi, Zaránd és Emi) megnyerték az iskolai vetélkedőt. Ajándékul egy margitszigeti bringóhintózást kaptak. A bringóhintó 6 személyes volt, elöl, középen és hátul is 2–2 hellyel. Hosszasan tanakodtak, hogyan üljenek fel rá. Bogi mindenképpen középen akart ülni, Kinga pedig Bogi mögött. Misi és Zaránd legelöl akartak utazni, Eminek és Nándinak nem volt különleges kívánsága. Sorold fel, hogyan ülhettek a gyerekek a bringóhintóra!

14. Sorold fel azokat a háromjegyű pozitív egész számokat, amelyekben a százasok és a tízesek helyi értékén álló számjegyek szorzata, illetve a tízesek és az egyesek helyi értékén álló számjegyek szorzata is 12!

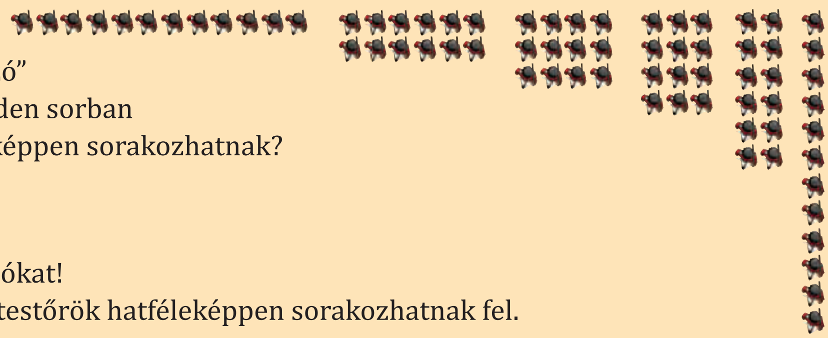
15. Sorold fel azokat a 3-ra végződő ötjegyű számokat, melyekben a számjegyek szorzata 60!

16. A 0, 3, 6 számjegyekből
a) kétjegyű *b)* háromjegyű *c)* négyjegyű
pozitív egész számokat készítünk úgy, hogy minden számjegyet többször is felhasználunk. Számold össze, melyikből hány darab készíthető!

Játék

Bumm!
Sorsoljatok ki egy tanulót, aki irányítja a játékot. Ő mutat arra a játékosra, akinek a következő számot kell mondania. Számoljatok 1-től kezdve egyesével növekvő sorrendben! Minden olyan esetben, amikor a szám 3-mal osztható vagy a számjegyei között 3-as van, a szám helyett Bumm!-ot kell mondani. Ha valaki eltéveszti, kezdjétek elölről.
Számoljatok 60-ig, majd visszafelé!

1. példa



Tucat király 12 testőre a „sorakozó” vezényszóra úgy áll fel, hogy minden sorban ugyanannyian álljanak. Hányféleképpen sorakozhatnak?

Megoldás

Rajzoljuk fel a lehetséges sorakozókat!
Az ábra alapján láthatjuk, hogy a testőrök hatféleképpen sorakozhatnak fel.

A 12 **osztói** az 1, 2, 3, 4, 6, 12 természetes számok, mert:

$12 = 1 \cdot 12$;	$12 = 2 \cdot 6$;	$12 = 3 \cdot 4$;	$12 = 4 \cdot 3$;	$12 = 12 \cdot 1$.
$12 : 1 = 12$;	$12 : 2 = 6$;	$12 : 3 = 4$;	$12 : 4 = 3$;	$12 : 12 = 1$.

A 12-nek **nem osztói** például: 5, 7, 8, 9, 10, 11, mert velük nem lehet maradék nélkül elosztani a 12-t. Más szavakkal például: nem létezik olyan egész szám, amit 5-tel megszorozva 12-t kapunk.

$12 : 5 = 2$	$12 : 7 = 1$	$12 : 8 = 1$	$12 : 9 = 1$	$12 : 10 = 1$	$12 : 11 = 1$
2	5	4	3	2	1

Ha egy természetes szám maradék nélkül osztható egy másikkal, akkor rövidebben úgy mondjuk, hogy **osztható** vele. Az osztandó ilyenkor **többszöröse** a hányadosnak és az osztónak is.

A 12 **többszöröse** a 4-nek és a 3-nak.	$\mathbf{12} = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$
A 4 **osztója** a 12-nek.	$12 : \mathbf{4} = 3$
A 3 **osztója** a 12-nek.	$12 : \mathbf{3} = 4$

Ha két pozitív egész számot összeszorzunk, akkor a szorzat mindkét számnak többszöröse.
Ha két pozitív egész számot összeszorzunk, akkor mind a két szám osztója a szorzatnak.

$5 \cdot 6 = 30$, az 5 és a 6 osztója a 30-nak, a 30 többszöröse az 5-nek és a 6-nak.

Az 1 minden számnak osztója, mert bármely számot megszorzunk 1-gyel, önmagát kapjuk.

Minden pozitív egész szám osztója és többszöröse önmagának.

2. példa

a) Mely természetes számmal szorozzuk meg a 0-t, hogy a szorzat 0 legyen?
b) Van-e olyan természetes szám, amelynek a 0 többszöröse?
c) Van-e a 0-nak osztója?
d) Van-e olyan pozitív egész szám, amelynek a 0 osztója?

Megoldás

a) A 0-t bármely természetes számmal megszorozva 0-t kapunk.
b) Az *a)* pont alapján a 0 minden természetes számnak a többszöröse.
c) Az *a)* pont alapján a 0-nak minden szám osztója.
d) Az *a)* pont alapján nincs olyan pozitív egész szám, amelynek a 0 osztója.

3. példa

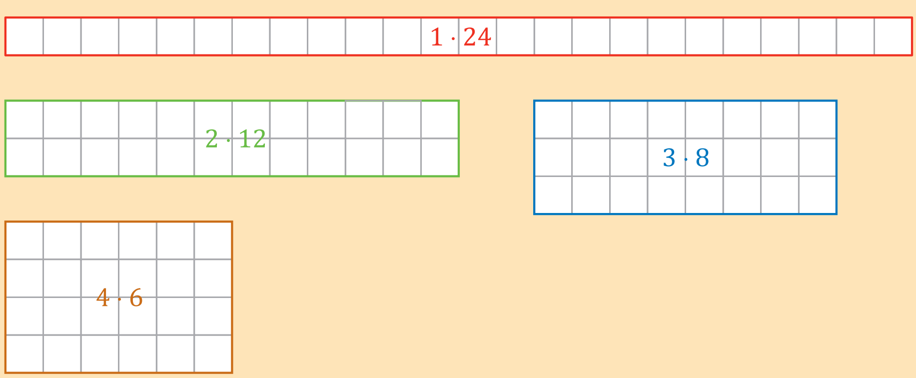
Egy téglalap területe 24 cm^2. Tudjuk, hogy a téglalap oldalai centiméterben mérve egész számok. Hány ilyen tulajdonságú téglalap van?

Megoldás

A 24-t kell két pozitív egész szám szorzatára felbontani. Ezt többféleképpen megtehetjük.

$24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$

Négy olyan téglalap van, amely a fenti feltételeknek megfelel.



A példában felsorolt szorzótényezők mindegyike osztója a 24-nek. Ezek:

1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24.

Egy pozitív egész szám osztói közül azokat a párokat, amelyek szorzata egyenlő a számmal, osztópároknak nevezzük.

A téglalap oldalainak hossza a 24 egy-egy osztópárját adja meg. A felsorolásban az osztópárokat azonos színnel jelöltük.

Feladatok

1. Válaszolj az alábbi kérdésekre!

a) Melyik az a szám, amelyik minden természetes számnak osztója?
b) Melyik az a szám, amelyik minden természetes számnak többszöröse?
c) Igaz-e, hogy minden természetes szám osztója önmagának?
d) Igaz-e, hogy a 0 minden természetes számnak osztója?
e) Igaz-e, hogy az 1-nek minden természetes szám többszöröse?
f) Igaz-e, hogy van olyan természetes szám, amelyik nem többszöröse önmagának?

2. Keresd meg azt a legkisebb pozitív egész számot, melynek a felsorolt számok osztói!
a) 1, 2, 3, 4, 6 *b)* 1, 2, 3, 6, 9 *c)* 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15

3. Egy 1-től különböző szám első nyolc többszöröse közül felsoroltunk néhányat. Melyik szám többszöröseit látod? Pótold a nyolc többszörös közül a hiányzókat!
a) 0, 14, 35, 49 *b)* 22, 55, 77 *c)* 50, 125, 175

4. Sorold fel a 15, a 24, a 27, a 31 és a 64 összes osztóját, és válaszolj az alábbi kérdésekre!
a) Melyik számnak lett a legtöbb osztója?
b) Melyik számnak lett a legkevesebb osztója?
c) Volt-e olyan szám, aminek páratlan darab osztója volt?

5. Sorold fel a 8, a 16 és a 20 első hat többszörösét! Készíts halmazábrát a felsorolt számokból, majd válaszolj az alábbi kérdésekre!
a) Melyik az a szám, amelyik mindhárom számnak többszöröse?
b) Hány darab számot találtál, ami csak a 8-nak és a 16-nak többszöröse?
c) Melyik az a szám, ami a 16-nak és a 20-nak is többszöröse?

6. *a)* Rajzolj a füzetedben egy számegyenest! 0 és 24 között színezd pirosra a 3-mal, zöldre a 4-gyel osztható számokat! Mely számok többszöröseit színezted mindkét színnel?
b) Rajzolj a füzetedben egy számegyenest! 0 és 24 között színezd pirosra a 3-mal, zölddel a 6-tal osztható számokat! Mely számok többszöröseit színezted mindkét színnel?

7. Egy önkéntes szervezet ajándékcsomagokat készít rászorulóknak. Kaptak 48 doboz fél kg-os kekszet. Sorold fel a füzetedben, hogy az önkéntesek hogyan készíthetnek csomagokat úgy, hogy mindegyik ugyanannyi kekszesdobozt tartalmazzon!

8. 24 db 1 cm élű kis kockából hány különböző méretű téglatestet készíthetünk? Sorold fel a füzetedben az összes lehetőséget! A téglatest építése során minden kis kockát fel kell használni.

1. példa

A népi iparművészek a magyar népművészet díszítő motívumait felhasználva készítettek egy hosszú faliszőnyeget, amelyen a minták periodikusan ismétlődnek az ábrán látható módon.

a) Figyeljük meg a faliszőnyeg mintáit! Állapítsunk meg szabályszerűségeket!
b) Milyen minta áll a 37. helyen?

Megoldás

a) A faliszőnyeg mintázata 4 motívum után ismétlődik, azaz 4 periódusú.

A  minta az 1., 5., 9., 13., … helyeken szerepel. Ezek a 4-gyel osztva 1 maradékot adó számok.

A  minta a 2., 6., 10., 14., … helyeken látható. Ezek a 4-gyel osztva 2 maradékot adó számok.

A  mintát a 3., 7., 11., 15., … helyekre rajzolták. Ezek a 4-gyel osztva 3 maradékot adó számok.

A  minta a 4., 8., 12., 16., … helyeken van. Ezek 4-gyel osztva 0 maradékot adnak, azaz a 4-gyel osztható számok.

b) A 37. helyen lévő mintázatot úgy határozhatjuk meg, hogy a 37-et elosztjuk 4-gyel, és a maradék megmutatja, melyik ábra van a kérdezett helyen.
37 : 4 = 9, a maradék 1, ezért az első minta kerül a 37. helyre.
1

A számok 4-gyel osztva négyféle maradékot adhatnak: 0, 1, 2, 3. Röviden ezt úgy mondjuk, hogy a számok 4-es maradéka 0, 1, 2, 3 lehet.

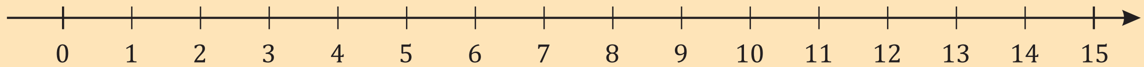
Játék

Írjátok fel a táblára az 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokat! Egy tanuló kimegy a táblához, és kiválaszt két számot. Azokat letörli, és felírja a két szám különbségét (ha a választott két szám különböző, akkor a nagyobból vonja ki a kisebbet). A következő tanuló ugyanezt teszi a táblán lévő számokkal. Addig folytassátok, amíg egyetlen szám marad a táblán!

Játsszatok le 4-5 partit! Figyeljétek meg, hogy az utolsó, táblán maradt szám páros vagy páratlan? Vajon miért?

2. példa

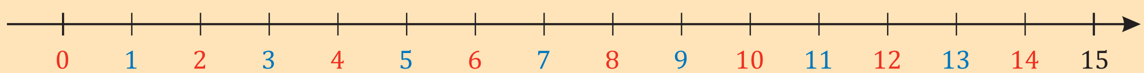
A számegyenesen 0-val kezdve minden második természetes számot pirosra, a többit kékre színezzük.



a) Soroljuk fel az első 8 piros számot!
b) Írjuk fel az első 7 kék számot!
c) Milyen közös tulajdonsága van az azonos színű számoknak?

Megoldás

a) Az első 8 piros szám 0, 2, 4, 6, 8, 10 12, 14. Ezek a páros számok. 2-vel oszthatók, 2-vel való osztási maradékuk 0 (2-es maradékuk 0).
b) Az első 7 kék szám 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13. Ezek a páratlan számok. 2-vel való osztási maradékuk 1 (2-es maradékuk 1).



Páros munka

Csoportosítsátok a füzetetekben a számokat 3-mal való osztási maradékuk alapján!

28, 47, 150, 253, 78, 97, 8, 19, 38, 62, 72

Beszéljétek meg, hány csoportot kell létrehozni! Miért?
A csoportba rendezés után egyeztessétek eredményeiteket!

3. példa

Igaz-e, hogy ha négy tetszőleges pozitív egész számot kiválasztunk, majd a 3-mal való osztási maradékuk szerint csoportokba rendezzük a számokat, lesz legalább kettő közülük, amelyik ugyanabba a csoportba kerül?

Megoldás

Az állítás igaz. A páros munkában láthattuk, hogy három csoportot kellett létrehozni, mert a számok hármas maradéka 0, 1, 2 lehet. Ha négy pozitív egész számot választunk, akkor biztosan lesz közöttük kettő, amelyeknek ugyanaz a hármas maradéka, ezért ezek a számok ugyanabba a csoportba kerülnek.

4. példa

Az áruházláncok nagy többsége a rózsákat csokorba kötve árusítja. Egy csokorba 8 szál rózsa kerül. Az elosztóhelyre pénteken 458 szál, szombaton 579 szál rózsa érkezett. A két nap során a lehető legtöbb csokrot készítik.

a) Hány szál virág nem köthető csokorba pénteken és szombaton?
b) Hogyan alakul a maradék virágok száma a második nap végére?
c) Mit mondhatunk a csokrok és a maradékok számáról, ha pénteken 460, szombaton 581 szál rózsát szállítanak az elosztóhelyre?

Megoldás

a) Osszuk el a pénteken, illetve szombaton beérkező virágok számát 8-cal!
Pénteken: 458 : 8 = 57, és a maradék 2.
Szombaton: 579 : 8 = 72, és a maradék 3.

b) Összesen 458 + 579 = 1037 virág érkezett a két nap alatt. 1037 : 8 = 129, és a maradék 5.
57 + 72 = 129, és 2 + 3 = 5, tehát 5 szál virágot nem kötöttek csokorba a két nap alatt. Ez természetesen megegyezik a pénteki és a szombati maradékok összegével.

c) 460 : 8 = 57, és a maradék 4, 581 : 8 = 72, és a maradék 5.
(460 + 581) : 8 = 1041 : 8 = 130, és a maradék 1.
Most nem egyezik meg az összeg maradéka a tagok maradékának összegével, 4 + 5 = 9, de a tagok maradékainak összege 8-cal osztva 1-et ad maradékul, 9 = 1 · 8 + 1, ami éppen a 8-as maradéka az 1041-nek.

A példában azt láthatjuk, hogy az összeg osztási maradéka vagy megegyezik a tagok osztási maradékának összegével, vagy ha ez az összeg nagyobb, mint az osztó, akkor annak is vesszük az osztási maradékát. Ezt jól használhatjuk a feladatok megoldásánál, mert gyakran kisebb számokkal kell műveleteket végezni.

Ha az összeg minden tagjának osztási maradéka 0, akkor az összeg osztási maradéka is 0, azaz **ha egy összeg minden tagja osztható egy számmal, akkor az összeg is osztható a számmal.**

A fenti szabály következménye: Két páros szám összege páros.

Fontos az alábbiakat is megjegyezni: Egy páros és egy páratlan szám összege páratlan.
Két páratlan szám összege páros.

Feladatok

1. Állapítsd meg az összegek kiszámolása nélkül, hogy a végeredmény páros lesz-e vagy páratlan!
a) 38 143 + 1957
b) 59 873 + 10 213 672 + 8 419 616
c) 9 + 98 + 987 + 9 876 + 98 765 + 987 654 + 9 876 543 + 98 765 432 + 987 654 321

2. Az alábbi számhalmazok közül melyikbe tartozhatnak az adott tulajdonságú számok: páros számok halmazába, páratlan számok halmazába, mindkét halmazba?
a) 6-tal osztva 0 maradékot adnak.
b) 3-mal osztva 2 maradékot adnak.
c) 4-gyel osztva 1 maradékot adnak.
d) 7-tel osztva 5 maradékot adnak.

3. Írd fel a füzetedbe a mai dátumot és a pontos időt, majd válaszolj az alábbi kérdésekre!

a) Hány óra lesz 300 perc múlva?
b) Hányadika és hány óra lesz 400 óra múlva?
c) Melyik év, melyik hónap, melyik napja lesz 150 nap múlva?
d) Hány éves leszel 200 hónap múlva?

4. Döntsd el az alábbi állításokról, melyik igaz, melyik hamis!

a) Ha egy 3-mal osztható számot és a 3 egyik többszörösét összeadom, akkor a kapott összeg osztható lesz 3-mal.
b) Ha egy 5-tel osztható számból kivonok egy 5-tel osztható számot, a különbség sohasem lesz osztható 5-tel.
c) Ha egy 8-cal osztható számhoz hozzáadok egy 4-gyel osztható számot, az összeg osztható lesz 4-gyel.
d) Ha egy 8-cal osztható számból elveszek egy 6-tal osztható számot, az eredmény páros lesz.

5. Írj a füzetedbe két olyan számot, melyeknek

a) a 6-os maradéka 4!
b) a 8-as maradéka 7!
c) a 2-es maradéka 1 és a 3-as maradéka 0!
d) a 4-es maradéka 3 és az 5-ös maradéka 1!
e) a 2-es, a 3-as és az 5-ös maradéka is 1!
f) a 2-es maradéka 1, a 3-as maradéka 2, az 5-ös maradéka 4!

6. A 6. a osztályban tanító tanárok közül ötöt Jutka néninek hívnak. Az öt Jutka néniben az is közös, hogy nagyon szeretik a kutyákat. Az osztály arra gondolt, hogy összegyűjtenek rengeteg kutyás képet egy dobozban, és egyenlően osztják majd szét a Jutka nénik között a pénteki névnapjukon. Hétfőn 43 db, kedden 24 db, szerdán 17 db, csütörtökön pedig 36 db kép került a dobozba.

a) Hány kutyás képet kaptak a Jutka nénik fejenként?
b) Az utolsó pillanatban, péntek reggel Dani még hozott néhány klassz képet. Hány darabot hozhatott, ha tudjuk, hogy 25-nél kevesebbet hozott, minden tanárnőnek jutott legalább egy, és kettő darab még meg is maradt belőle?

7. Hány olyan kétjegyű szám van,

a) amelyik 5-tel osztva 1 maradékot ad? *b)* amelyik 3-mal osztva 2 maradékot ad?

8. Sorold fel egy természetes szám összes lehetséges 4-es maradékát!
Hány pozitív egész számot kell megadnunk ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük 2, amelyeknek ugyanannyi a 4-gyel vett osztási maradéka?

9. Elosztható-e 35 db üveggolyó 5 óvodás gyerek között úgy, hogy minden gyerek páros számú üveggolyót kapjon? Válaszodat indokold!

7. HÁNY OSZTÓJA VAN?

Csoportmunka

Alkossatok háromfős csoportokat! A csoport egyik tagja válasszon egy számot a lent felsorolt számok közül. A másik két tanuló valamelyike mondjon a számnak egy olyan osztóját, amelyik nagyobb, mint 1. A másik tanuló mondjon egy olyan osztót, amely előtte nem hangzott el, és ez így folytatódjon tovább! Kettőjük közül az nyer, aki utolsóként tudott osztót mondani. Az a játékos, aki a számot választotta, írja le a füzetébe az elhangzott osztókat csökkenő sorrendben.

Ez után a következő csoporttag választ a számok közül, és a játék a fent leírtak szerint folytatódik.

Játsszatok két kört!

Legyenek a számok: 12, 16, 9, 17, 64, 23!

1. példa

a) Válogassuk szét a játékban felsorolt számokat aszerint, hogy pontosan két osztójuk vagy kettőnél több osztójuk van!

b) Hány olyan pozitív egész szám van, amelynek pontosan egy osztója van?

Megoldás

a) Pontosan két osztója van a 17-nek, 1 és önmaga, és a 23-nak, 1 és önmaga.
Kettőnél több osztója van: 9, 12, 16, 64.
9 osztói: 1, 3, 9.
12 osztói: 1, 2, 3, 4, 6, 12.
16 osztói: 1, 2, 4, 8, 16.
64 osztói: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.

b) Csak az 1-nek van egy osztója, önmaga.

Azokat a pozitív egész számokat, amelyeknek pontosan két pozitív osztója van, prímszámoknak nevezzük.

Az első néhány prímszám: 2, 3, 5, 7, 11, 13, …

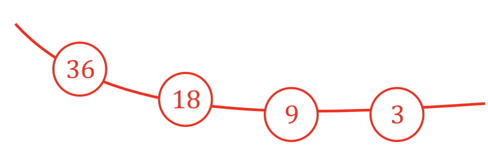
Azokat a pozitív számokat, amelyeknek kettőnél több pozitív osztójuk van, összetett számoknak nevezzük.

Az 1-nek egy osztója van, így az 1 se nem prímszám, se nem összetett szám.

Páros munka

Keressetek olyan természetes számokat, amelyeknek pontosan három pozitív osztója van!
Beszéljétek meg egymással, milyen számokat találtatok!

Ha úgy képezünk egy számsorozatot, hogy leírunk egy számot, majd egy nála kisebb osztóját, majd annak is egy osztóját, akkor egy osztóláncot kapunk. Az 1 minden szám osztója, így nem írjuk a lánc végére. Például a 36 egy osztólánca az ábrán látható.



Egy számhoz több osztóláncot is készíthetünk.

2. példa

Írjuk fel az 50, 12, 8, 13 osztóláncait!

Megoldás

8 osztólánca: 8-4-2 vagy a 8-2
12 osztóláncai: 12-6-3, 12-6-2, 12-4-2, 12-3, 12-2
50 osztóláncai: 50-25-5, 50-10-5, 50-10-2, 50-5, 50-2
13 osztólánca egyszemű, csak a 13-ból áll.

Az osztóláncokból is láthatjuk: **ha egy szám osztója egy pozitív egész számnak, akkor az osztó minden osztója is osztója az vizsgált számnak.**

3. példa

a) Mely számok oszthatók 7-tel az alábbi szorzatok közül?

$\boxed{7 \cdot 15}$ $\boxed{14 \cdot 20}$ $\boxed{8 \cdot 12}$ $\boxed{9 \cdot 35 \cdot 2}$ $\boxed{12 \cdot 5 \cdot 60}$

b) Lehet-e a felsorolt szorzatok között olyan, amelynek pontosan két osztója van?

Megoldás

a) 1. lehetőség: Kiszámítjuk a műveletek végeredményét, elosztjuk 7-tel, és ha 0 maradékot kapunk, akkor a szám osztható 7-tel. Ez a módszer nagyon sok számolást igényel, ezért keressünk más lehetőséget.

2. lehetőség: Ha egy szám szorzat alakjában szerepel a 7 vagy annak többszöröse, akkor a 7 osztója a számnak.

$7 \cdot 15$ osztható 7-tel.

$14 \cdot 20 = 2 \cdot 7 \cdot 20$ osztható 7-tel.

$8 \cdot 12$ szorzatban sem a 8, sem a 12 nem osztható 7-tel, ezért a szorzat sem osztható 7-tel.

$9 \cdot 35 \cdot 2$ szorzatban a $9 \cdot 35 \cdot 2 = 9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2$, így a szorzat osztható 7-tel.

$12 \cdot 5 \cdot 60$-ban egyik tényező sem osztható 7-tel, így a szorzat sem osztható 7-tel.

b) Nem, mert egy szorzatnak osztója minden szorzótényező, és ezenkívül az 1. Így minden szorzatnak legalább három osztója van.

Feladatok

1. Sorold fel a számok osztóit!

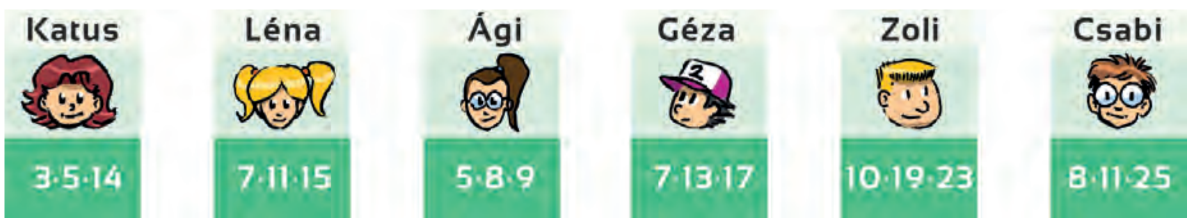
a) 25 *b)* 100 *c)* 84 *d)* 198

2. Válogasd ki a következő számok közül azokat, amelyeknek pontosan két osztója van! A többi számhoz készíts legalább három szem hosszú osztóláncot! Ha tudsz, készíts többet is!
24, 29, 32, 37, 48, 53, 60

3. Keressetek olyan számokat, amelyeknek pontosan 1, 2, 3, 4, 5, 6 darab osztója van!

4. Készíts a füzetedben egy táblázatot, és összegezd benne, hogy az alábbi szorzatok közül melyek oszthatók 2-vel, 3-mal, 5-tel, 6-tal, 7-tel!
a) $2 \cdot 3 \cdot 8$ *b)* $6 \cdot 7 \cdot 10$ *c)* $2 \cdot 9 \cdot 15$ *d)* $8 \cdot 14 \cdot 15$

5. Péter bácsi kiosztotta a gyerekeknek az alábbi számkártyákat. Minden gyerek egyet kapott. Úgy kellett párba állniuk, hogy a párok kártyáin levő számok szorzata osztható legyen 12-vel.
a) Keresd meg a párokat! Figyelj a párosításnál arra, hogy mindenki megtalálja a párját!
b) Keress még olyan számokat, amikkel minden pár számszorzatai oszthatók!



6. Nikolausz király szét akarja osztani 60 várbirtokát a leghűségesebb emberei között. Gondosan ügyel arra, hogy mindenki ugyanannyi várbirtokot kapjon. Hány ember között oszthatja szét ezeket, és ki mennyit kap majd?

7. Ha a gondos sárkánymamák kényeztetni szeretnék hétfejű kicsinyeiket, akkor csimbákfalatkákat vásárolnak nekik. Egy csomagban 210 csimbákfalatka van.

a) Hány csimbák jutna egy hétfejű sárkánynak fejenként ebből a csomagból, ha mindet ő eszi meg, és minden feje ugyanannyit kap?
b) Legfeljebb hány kis sárkányt lehetne kényeztetni egyetlen ilyen csimbákcsomaggal? (Figyelj rá, hogy minden fejnek egyenlő mennyiségű falatka jusson!)
c) Hány gyereksárkány lehet egy olyan családban, ahol igazságosan el tudják osztani a csomagot? (Vigyázz, ha nem jut minden fejnek ugyanannyi csimbákfalatka, kitör a tűzharccal járó testvérháború!)

8. Egy számról tudjuk, hogy osztója a 6, a 7 és a 8. Válaszd ki az alábbi állítások közül azt, amelyik biztosan igaz! A számnak
a) osztója a 3 *b)* osztója a 14 *c)* osztója a 16 *d)* osztója a 24 *e)* osztója a 10.

9. Hány különböző téglatestet tudunk építeni
a) 12 *b)* 18 *c)* 36 *d)* 64 egységkockából?

A következő három leckében olyan szabályokról tanulunk, amelyek segítségével kevesebb számolással eldönthetjük egy adott számról, hogy milyen számokkal osztható. Most a leggyakrabban előforduló szabályokat vizsgáljuk meg.

1. példa

Mely számok oszthatók 2-vel?

a) 48 *b)* 257 *c)* 346

Megoldás

A megoldásban felhasználjuk, hogy a 0, 2, 4, 6, 8, 10 osztható 2-vel. Felhasználjuk még azt is, hogy ha két szám mindegyike osztható 2-vel, akkor az összegük is osztható, és ha egy szám osztható 2-vel, akkor minden többszöröse is osztható.

a) $48 = 40 + 8 = 4 \cdot 10 + \mathbf{8}$, a 40 a 10-nek többszöröse, így osztható 2-vel, a 8 osztható 2-vel, ezért az összegük is osztható 2-vel.

b) $257 = 200 + 50 + 7 = 20 \cdot 10 + 5 \cdot 10 + \mathbf{7}$, a 200 és az 50 osztható 2-vel, a 7 nem, így az összegük sem osztható 2-vel.

c) $346 = 340 + 6 = 34 \cdot 10 + \mathbf{6}$, a 340 osztható 2-vel, a 6 osztható 2-vel, az összegük osztható 2-vel.

Egy szám pontosan akkor osztható 2-vel, ha az utolsó számjegye osztható 2-vel. Ez azt jelenti, hogy a szám végződése 0, 2, 4, 6 vagy 8 lehet.

2. példa

Mely számok oszthatók 5-tel?

a) 235 *b)* 2680 *c)* 487

Megoldás

Ugyanolyan módon járhatunk el a számok 5-tel való oszthatóságának vizsgálatánál, mint az 1. példában.

Az 5 többszörösei 0, 5, 10, 15, 20, …
A pozitív egész számok sorozatában az első két 5-tel osztható szám az 5 és a 10.

235 esetében elegendő megnézni az utolsó számjegyet, mert
$235 = 230 + 5 = 23 \cdot 10 + \mathbf{5}$. A 230 a 10-nek többszöröse, ezért osztható 5-tel, az 5 osztható 5-tel, így az összeg osztható 5-tel.

Hasonlóan beláthatjuk, hogy a 2680 is osztható 5-tel, és a 487 nem osztható 5-tel.

Megfigyelhetjük, hogy ha egy szám 5-nek a többszöröse, azaz a szám osztható 5-tel, akkor 0-ra vagy 5-re végződik.

Egy szám pontosan akkor osztható 5-tel, ha az utolsó számjegye 0 vagy 5.

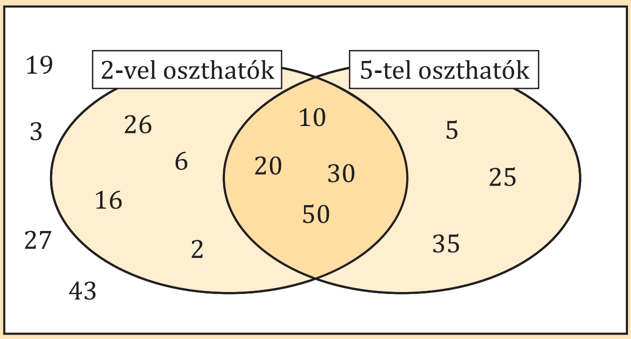
3. példa

a) Rendezzük halmazba a felsorolt számokat 2-vel és 5-tel való oszthatóság szerint! Készítsünk halmazábrát, és írjuk a megfelelő helyre a számokat!
2, 3, 5, 10, 19, 20, 30, 27, 26, 35, 43, 25, 16, 6, 50

b) Mely számok kerültek a két halmaz közös részébe?

Megoldás

a)



b) A két halmaz közös részébe azok a számok kerültek, amelyek oszthatók 2-vel és 5-tel, így a szorzatukkal, azaz 10-zel is. Ezek a számok 10 többszörösei, ezért 0-ra végződnek.

Ha egy szám utolsó számjegye 0, akkor felírható 10 többszöröseként, azaz a 10 osztója a számnak.

Egy szám pontosan akkor osztható 10-zel, ha az utolsó számjegye 0.

A három megismert oszthatósági szabály alkalmazásával elegendő a számok utolsó számjegyét vizsgálni ahhoz, hogy eldöntsük, a szám osztható-e 2-vel, 5-tel, 10-zel. Így valóban sokkal egyszerűbben és gyorsabban megoldhatjuk az ehhez kapcsolódó feladatokat.

4. példa

Osztható-e 10-zel, 5-tel, illetve 2-vel az 1956; a 2015; a 3000 és a 149?

Megoldás

Készítsünk táblázatot!

		Oszható 10-zel?	Oszható 5-tel?	Oszható 2-vel?
1956	1956 = 1950 + 6	az egyesek helyén 6 áll, nem osztható	az egyesek helyén 6 áll, nem osztható	az egyesek helyén 6 áll, osztható
2015	2015 = 2010 + 5	az egyesek helyén 5 áll, nem osztható	az egyesek helyén 5 áll, osztható	az egyesek helyén 5 áll, nem osztható
3000	3000 = 3000 + 0	az egyesek helyén 0 áll, osztható	az egyesek helyén 0 áll, osztható	az egyesek helyén 0 áll, osztható
149	149 = 140 + 9	az egyesek helyén 9 áll, nem osztható	az egyesek helyén 9 áll, nem osztható	az egyesek helyén 9 áll, nem osztható

Feladatok

1. Írd le a felsorolt számokat a füzetedbe! Karikázd be kékkel az 5-tel, pirossal a 2-vel oszthatókat! Mit állapíthatsz meg a pirossal és kékkel is bekarikázott számokról?

600 000; 44 017; 650; 456; 303; 9150; 205; 340; 84; 460; 975; 2020.

2. Határozd meg, milyen számjegy írható a ✱ helyére, hogy az így kapott számok oszthatók legyenek

a) 2-vel? *b)* 5-tel? *c)* 10-zel?

59✱ 76 10✱ 9 21✱ 741 8 629 1✱0 ✱1 813 176

3. Négy gyerek az alábbi négy állítás igazságtartalmát vizsgálja. Aladár szerint egy, Bella szerint kettő, Csongor szerint három, Dávid szerint négy igaz. Szerinted kinek van igaza?

I. Páratlan darab páratlan szám összege páratlan.
II. Páratlan darab páros szám összege páratlan.
III. Páros darab páratlan szám összege páros.
IV. Páros darab páros szám összege páros.

4. Igaz-e?

a) Ha egy szám osztható 10-zel, akkor osztható 2-vel is.
b) Ha egy szám osztható 5-tel, akkor osztható 10-zel is.
c) A páros számok tartalmaznak páros számjegyet.
d) Van 5-tel nem osztható páros szám.
e) Ha egy szám tartalmaz páros számjegyet, akkor a szám páros.
f) Ha egy természetes szám osztható 5-tel, akkor nem osztható 10-zel.

5. Hány 100-nál kisebb természetes szám osztható

a) 2-vel? *b)* 5-tel? *c)* 10-zel?
d) 2-vel vagy 5-tel? *e)* 2 és 5 közül pontosan az egyikkel?
f) 10-zel, de 2-vel és 5-tel nem? *g)* 2-vel és 5-tel, de 10-zel nem?

A válaszok megadásához segíthet, ha halmazábrát készítesz.

6. Állapítsd meg az alábbi összegekről azok kiszámítása nélkül, hogy melyek oszthatók

a) 2-vel, *b)* 5-tel, *c)* 10-zel!

$\boxed{98 + 124}$ $\boxed{531 + 693 + 716}$ $\boxed{1981 + 2810 + 5983 + 8096}$ $\boxed{1 + 12 + 123 + 1234 + 12345}$

$\boxed{3 \cdot 4 \cdot 5 + 8 \cdot 9}$ $\boxed{7 \cdot 11 \cdot 15 + 23 \cdot 25 \cdot 17}$ $\boxed{12 \cdot 17 \cdot 35 + 21 \cdot 25 \cdot 28}$ $\boxed{31 \cdot 35 + 43 \cdot 45 + 55 \cdot 57}$

7. Az Ó utcában összesen 46 ház van. Az utca számozása a Kő tértől indul. A bal oldalon vannak a páros, a jobb oldalon a páratlan házszámok, és mindkét oldalon ugyanannyi ház van.

a) Hányadik ház a Kő tértől a 14-es számú?
b) A Kő tértől elindulva a bal oldalon lévő tizenkettedik háznak mi a száma?
c) Az utca másik végétől számolva mi a tizenkettedik ház száma a páros oldalon?

8. Hogyan tudnád eldönteni egy kettes számrendszerben felírt számról, hogy oszható-e kettővel?

9. OSZTHATÓSÁG 3-MAL ÉS 9-CEL

1. példa

Az osztály 9 lánytanulója 2187 matricát gyűjtött össze. Mindegyiknek ugyanannyi matricája volt. Lehetséges-e ez? Hány matricájuk volt fejenként?

Megoldás

Kézenfekvő elvégezni az osztást: 2187 : 9 = 243.

38
27
0

A maradék 0, tehát minden lánynak 243 db matricája volt.

Keressünk olyan szabályt, amellyel eldönthetjük egy számról, hogy osztható-e 9-cel vagy sem!

$2187 = 2000 + 100 + 80 + 7$

$1000 = 999 + 1$ Vegyünk el az 1000-esekből 1-et, a maradék 999 már osztható 9-cel.

$2000 = 2 \cdot 1000 = 2 \cdot 999 + \mathbf{2}$

$100 = 99 + 1$ Vegyünk el a 100-asokból 1-et, a maradék 99 már osztható 9-cel.

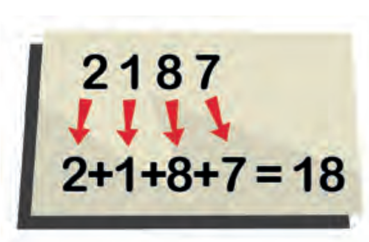
$100 = 1 \cdot 100 = 1 \cdot 99 + \mathbf{1}$

$10 = 9 + 1$ Vegyünk el a 10-esekből 1-et, a maradék 9 már osztható 9-cel.

$80 = 8 \cdot 10 = 8 \cdot 9 + \mathbf{8}$

Az 1-esekből **7** marad.

$\mathbf{2} + \mathbf{1} + \mathbf{8} + \mathbf{7} = 18$ Ha a maradékok összege osztható 9-cel, akkor szétoszthatók a matricák a lányok között, ha pedig nem osztható 9-cel az összeg, akkor nem.
A 18 osztható 9-cel, tehát az eredeti szám, a 2187 is osztható 9-cel.



Figyeljük meg, hogy éppen a 2187 számjegyeit adtuk össze.

Egy természetes szám pontosan akkor osztható kilenccel, ha számjegyeinek összege osztható kilenccel.

A szabály segítségével eldönthetjük, hogy egy szám osztható-e 9-cel. Ha azt is tudni akarjuk, hogy mekkora a hányados, akkor el kell végezni az osztást. A $9 = 3 \cdot 3$, tehát a 3 osztója a 9-nek. Az előző példában a 9; 99; 999; … nemcsak 9-cel osztható, hanem 3-mal is, tehát ugyanazt a szabályt fogalmazhatjuk meg a 3-mal való oszthatóságra is.

Egy természetes szám pontosan akkor osztható hárommal, ha számjegyeinek összege osztható hárommal.

Csoportmunka

Alkossatok 4 fős csoportokat! A csoport három tagja egymás után mondjon egy-egy számjegyet! Az utolsónak olyan számjegyet kell mondania, hogy a négy számból alkotott négyjegyű szám osztható legyen 9-cel. Ismételjétek meg a számalkotást úgy, hogy minden alkalommal más fejezze be a feladatot!

2. példa

Az iskolai sportversenyen a három hatodik osztály összesen 3457 pontot szerzett. Lehetséges-e, hogy mind a három osztálynak ugyanannyi pontja lett?

Megoldás

A kérdés az, hogy 3 osztója-e a 3457-nek. A számjegyek összege 3 + 4 + 5 + 7 = 19, nem osztható 3-mal. Nem lehetséges, hogy mindhárom osztály ugyanannyi pontot szerzett.

3. példa

Ábrázoljuk halmazábrán a 20-nál kisebb természetes számokat!

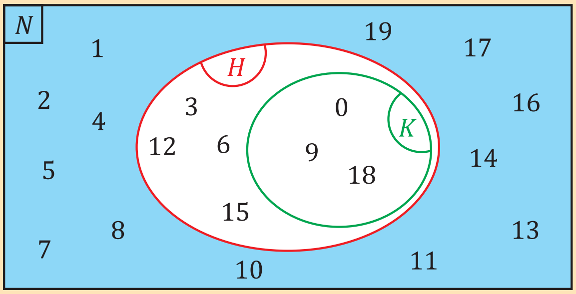
H = {hárommal osztható számok}; *K* = {kilenccel osztható számok}

a) Milyen kapcsolat van a *H* és a *K* halmaz között?

b) Hol helyezkednek el a halmazábrán a hárommal nem osztható számok?

Megoldás

a) Az alaphalmazt, azaz a 20-nál kisebb természetes számok halmazát jelöljük most is *N*-nel. A *K* halmaz benne van a *H* halmazban.



b) A hárommal nem osztható számok az alaphalmaz azon elemei, amelyek nincsenek benne *H*-ban. Az ábrán kékkel jelöltük.

Ha a *K* halmaz minden eleme eleme a *H* halmaznak is, akkor azt mondjuk, hogy *K* **részhalmaza** *H*-nak.

Kutatómunka

Keressetek olyan szólásokat, közmondásokat, amelyikben a három vagy a kilenc szó szerepel!

Feladatok

1. Mely számok oszthatók 3-mal vagy 9-cel, esetleg mindkettővel az alábbiak közül?

246 198 333 780 802 231 2349 3075 35 634 42 624

2. Írd halmazábrába az alábbi számokat a 3-mal és a 9-cel való oszthatóságuk szerint!

1818 1881 2442 4422 4554 5445 6336 7272

3. Melyik számkártyahármasokból állíthatsz össze hárommal osztható számokat? Használd fel mind a három kártyát! Írd le a lehetséges megoldásokat!

a)


b)


c)


4. A mezőgazdász apa magához hívta 3 fiát, és megkérte őket, hogy az állatai közül az egyik fajtát osszák el egymás között igazságosan. Melyik jószágot választották, ha mindhármuknak ugyanannyi jutott?

421 kacsa

2576 házityúk

1695 liba

5. Melyik igaz?

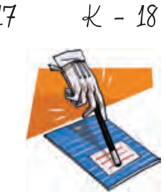
a) Minden 3-mal osztható szám osztható 9-cel.
b) Minden 9-cel osztható szám osztható 3-mal.
c) Nem minden 9-cel osztható szám páratlan.
d) Nincs olyan szám, amely 3-mal és 9-cel osztva különböző maradékot ad.
e) Ha egy szám 9-cel osztva 1 maradékot ad, akkor 3-mal osztva is 1 a maradéka.
f) Ha egy szám 3-mal osztva 2-t ad maradékul, akkor 9-cel osztva is 2 a maradéka.

6. Zsolti egy igazi varázsló. A múltkor a következő trükkel kápráztatta el az osztályt:

Gondoljatok egy számra 1 és 10 között! Szorozzátok meg 9-cel! Adjátok össze az így kapott szám számjegyeit! Ha egyjegyűt kaptatok, ez a lépés kimarad. Válasszátok ki azt a betűt, ami ehhez az összeghez tartozik!

A – 1	*Á – 2*	*B – 3*	*C – 4*	*Cs – 5*	*D – 6*	*Dz – 7*	*Dzs – 8*	*E – 9*
É – 10	*F – 11*	*G – 12*	*Gy – 13*	*H – 14*	*I – 15*	*Í – 16*	*J – 17*	*K – 18*

Most gondoljatok egy kontinensre, amelynek ez a kezdőbetűje, és írjátok fel a füzetetekbe! Én pedig előveszem a varázspálcámat, hármat koppintok vele a becsukott füzetetekre, és megmondom, hogy mit írtatok!



Szerinted neked sikerülne varázspálca nélkül Zsolti attrakciója?

7. Milyen számjegyek írhatók az alábbi jelek helyére, hogy az összeg osztható legyen *a)* 3-mal, *b)* 9-cel?

28♦17 + 796▲5

Játék

– Tudok egy szuper páros játékot – mondja Balu. – A 0-ról indulunk, és felváltva mondunk számokat úgy, hogy csak 1-gyel vagy 2-vel vagy 3-mal lehet nagyobb az előtte elhangzott számnál. Aki először kimondja a 20-at, az nyer!

a) Próbáld ki a padtársaddal ezt a játékot!
b) Adj nyerő stratégiát! (El kell döntened, hogy kezdeni szeretnél vagy második leszel, és az ötleteddel biztosan nyerni fogsz, akármit is mondjon a másik játékos.)
c) Hogyan módosul a nyerő stratégiád, ha az nyer, aki a 30-at kimondja?

1. példa

Kedvenc nápolyiszeletünket 3 + 1 akcióban szeretné árusítani egy édességeket gyártó cég. Marad-e becsomagolatlan nápolyiszelet

a) 144 *b)* 636 *c)* 1254 szelet nápolyiból?

Megoldás

a) Ha elosztjuk a nápolyiszeletek számát 4-gyel, a maradék megadja, hogy hány szelet nápolyit nem tudnak becsomagolni. 144 : 4 = 36, és 0 a maradék.
Nézzük meg más gondolatmenettel! 144 = 100 + 44
A 100 osztható 4-gyel, ezért elég megnézni a 44-et. 44 osztható 4-gyel, így az összeg is osztható 4-gyel. Minden nápolyiszeletet be lehet csomagolni négyes csomagokba.

b) Az előzőeket felhasználva a 636-ot bontsuk összeggé: 636 = 600 + 36 = 6 · 100 + 36
A 600 osztható 4-gyel, így elegendő a 36-ot megnézni, ami szintén osztható 4-gyel.
Ebben az esetben is összecsomagolhatók négyesével a nápolyiszeletek.

c) A *b)* részhez hasonlóan járunk el. 1254 = 1000 + 200 + 54
Az 1000 és a 200 osztható 4-gyel, 54 azonban nem, 54 : 4 = 13, és maradék 2. Ebben az esetben 2 szelet nápolyit nem tudnak becsomagolni.

A példában láttuk, hogy a számok 4-gyel való oszthatóságának eldöntéséhez elegendő az utolsó két helyen álló kétjegyű számot megnézni, mert a 100 és annak egész számú többszöröse osztható 4-gyel.

Egy szám pontosan akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két helyen álló kétjegyű szám osztható 4-gyel.

Az utolsó két helyen álló számok vizsgálatával további oszthatósági szabályokat tudunk felfedezni.
Az előző órákon megnéztük, hogy egy szám pontosan akkor osztható 10-zel, ha az utolsó számjegye 0.

Mi a 100-zal való oszthatóság feltétele?
100 = 10 · 10, ezért a 10 többszörösei közül minden tizedik osztható 100-zal: 100, 200, 300, ..., 1000.
Látjuk, hogy ezeknél a számoknál az utolsó két számjegy 0.

Egy szám pontosan akkor osztható 100-zal, ha az utolsó két helyen álló számjegy 0.

Kutatómunka

Keressetek még olyan számot, ahol elegendő az utolsó két helyen álló kétjegyű szám vizsgálata az oszthatóság eldöntéséhez!

Feladatok

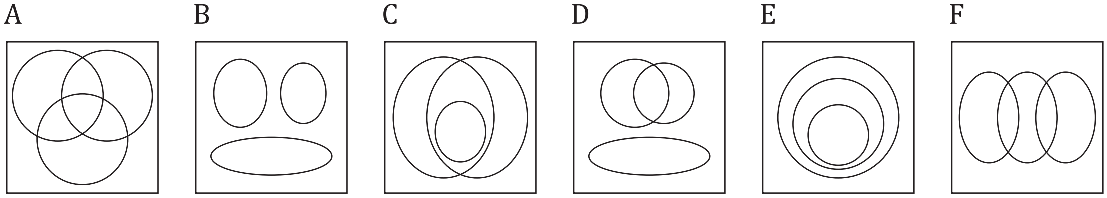
1. Mely számok oszthatók 4-gyel az alábbiak közül?
38 96 137 258 1372 28 014 32 060 975 468

2. Mely számok oszthatók biztosan 4-gyel a következők közül? Az ***a*** és ***b*** betűk számjegyeket jelölnek.
a64 6***a***4 64***a*** 1***a***52 ***ab***68 1***a***2***b***4 9***ab***092 ***a***780***b***74

3. Írj a füzetedbe három olyan számot, amelyek
a) oszthatók 4-gyel, de 100-zal nem!
b) oszthatók 2-vel, de 4-gyel nem!
c) oszthatók 100-zal, de 4-gyel nem!
d) oszthatók 4-gyel, de 2-vel nem!
e) oszthatók 4-gyel és 100-zal is!
f) oszthatók 2-vel és 4-gyel is!

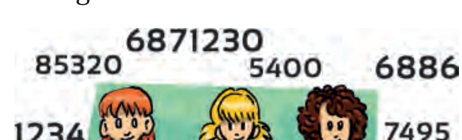
4. Válaszd ki az alábbi állítások közül az igazakat!
a) Van olyan 2-re végződő szám, ami osztható 4-gyel.
b) Minden 4-re végződő szám osztható 4-gyel.
c) Minden 700-ra végződő szám osztható 100-zal.
d) Minden 100-zal osztható szám osztható 4-gyel is.

5. A B C D E F



a) Rajzold le a füzetedbe az **A** halmazábrát, és írd bele a felsorolt számokat a 4-gyel, 5-tel és 100-zal való oszthatóságuk szerint!
15 20 36 45 52 60 100 115 180 172 200 240 256 300
b) Rajzold le újra az **A** halmazábrát, és írd bele a felsorolt számokat a 2-vel, 4-gyel és 100-zal való oszthatóságuk szerint!
18 24 32 48 92 100 134 160 200 208 300 456 514
c) Válaszd ki az *a)* feladat, majd a *b)* feladat számaihoz az alkalmas halmazábrát a lerajzoltak közül, és töltsd ki a felsorolt számokkal a megfelelő oszthatóság szerint!

6. Válaszd ki, mely számokra gondolhattak a gyerekek az alábbiak közül, ha tudod, hogy minden gyerek három állításából pontosan kettő igaz, és mindannyian különböző számra gondoltak!



Lencsi: A szám osztható 3-mal. Osztható 100-zal. Nem osztható 4-gyel.
Dávid: A szám páratlan. Osztható 5-tel. Osztható 100-zal.
Ilonka: A szám osztható 4-gyel. Osztható 9-cel. 0-ra végződik.

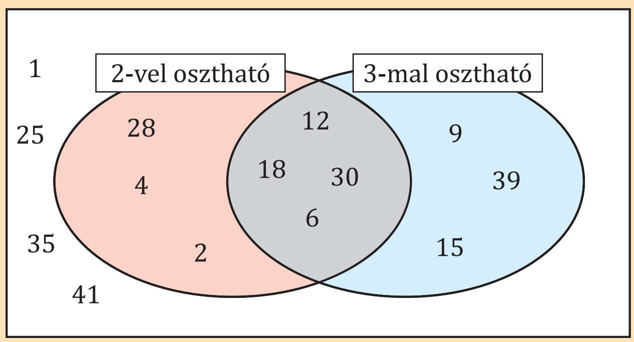
Az eddig megismert oszthatósági szabályok felhasználásával további szabályokat lehet megfogalmazni. Nézzünk erre példát!

1. példa

Rendezzük a felsorolt számokat két halmazba a 2-vel és a 3-mal való oszthatóságuk szerint! Készítsünk halmazábrát, és írjuk a megfelelő helyre a számokat!

1, 4, 12, 9, 15, 30, 28, 39, 41, 25, 18, 2, 6, 35

Megoldás



2. példa

Az előző példa segítségével válaszoljunk az alábbi kérdésekre!
a) Mi jellemzi a két halmaz közös részébe tartozó számokat?
b) Milyen számok kerültek a pirossal színezett részbe?
c) Mely számokat tartalmazza a kékkel színezett rész?
d) Mi jellemzi a színezetlen területen lévő számokat?

Megoldás

a) A két halmaz közös részébe kerülnek azok a számok, amelyek oszthatók 2-vel és 3-mal. Ezek a számok mind oszthatók 6-tal.
b) A piros részben lévő számok oszthatók 2-vel, de nem oszthatók 3-mal.
c) A kék részben lévő számok oszthatók 3-mal, de nem oszthatók 2-vel.
d) A színezetlen részbe azok a számok kerültek, amelyek sem 2-vel, sem 3-mal nem oszthatók.

Ha egy szám osztható 2-vel és 3-mal, akkor osztható 6-tal.

$6 = 2 \cdot 3$, ezért ha egy szám osztható 6-tal, akkor osztható 2-vel és 3-mal.

Ezt a két állítást egybefoglalva azt mondjuk, hogy **egy szám pontosan akkor osztható 6-tal, ha osztható 2-vel és 3-mal.**

A 6-tal való oszthatóságot a már tanult oszthatósági szabályok alapján is megfogalmazhatjuk.

Azok a páros számok oszthatók 6-tal, amelyekben a számjegyek összege osztható 3-mal.

11. ÖSSZETETT OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOK

PÁROS MUNKA

Készítsetek az 1. példához hasonló halmazábrát a 3-mal és az 5-tel való oszthatóság szerint a következő számokkal: 3, 4, 15, 17, 20, 45, 55, 60, 72, 120!

Tapasztalataitok alapján fogalmazzátok meg közösen, mikor osztható egy szám 15-tel!

Feladatok

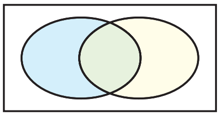
1. Válaszd ki az alábbi számok közül a 6-tal oszthatókat!
162 453 822 2848 66 666 111 111 123 321 234 432

2. Ábrázold halmazábrán a felsorolt számokat a 2-vel, 3-mal és 5-tel való oszthatóságuk szerint!

6 9 12 15 18 22 30 37 39 45 48 60 71 75 82

Melyik igaz és melyik hamis az alábbi állítások közül?
a) Minden 2-vel és 5-tel osztható szám osztható 10-zel is.
b) Minden 6-tal osztható szám osztható 3-mal is.
c) Minden szám, ami osztható 2-vel, 3-mal és 5-tel, az osztható a szorzataikkal (6-tal, 10-zel, 15-tel és 30-cal) is.
d) Minden szám, ami osztható 2-vel és 6-tal, az osztható 12-vel is.

3. Rajzolj a füzetedbe feladatonként egy-egy ilyen halmazábrát! Írd a számokat 1-től 30-ig a halmazábra megfelelő részébe!



a) Legyen az egyik halmaz a 3-mal, a másik a 4-gyel osztható számok halmaza. Milyen számok kerültek a közös részbe?
b) Legyen az egyik halmaz a 3-mal, a másik a 6-tal osztható számok halmaza. Milyen számok kerültek a közös részbe?
c) Legyen az egyik halmaz a 4-gyel, a másik a 6-tal osztható számok halmaza. Milyen számok kerültek a közös részbe?

4. Írj a 25***a***4, 846***b***, ***c***6092 számokban a betűk helyére számjegyeket úgy, hogy oszthatóak legyenek
a) 2-vel és 3-mal! *b)* 3-mal és 5-tel! *c)* 2-vel és 5-tel! *d)* 4-gyel és 10-zel!

5. A Jedi Tanács előtt felsorakozott 60 padawan, hogy teljesítse a vizsga első próbáját. Mikor csend lett, egy Jedi mester megállt előttük és azt mondta: „Képzeljétek el, hogy minden második padawan leguggol, minden harmadik kinyújtja a jobb kezét, minden negyedik kinyújtja a bal kezét és minden ötödik becsukja a szemét.
Anélkül, hogy megmozdulnátok, mondjátok meg, hány padawan lenne előttem ezután a parancssor után, akik guggolva, csukott szemmel, mindkét kezüket kinyújtanák!"
Szerinted hányan lennének? Te átmennél a Jedi Tanács első próbáján?

TÖBBSZÖRÖS, KÖZÖS TÖBBSZÖRÖS 12.

Csoportmunka

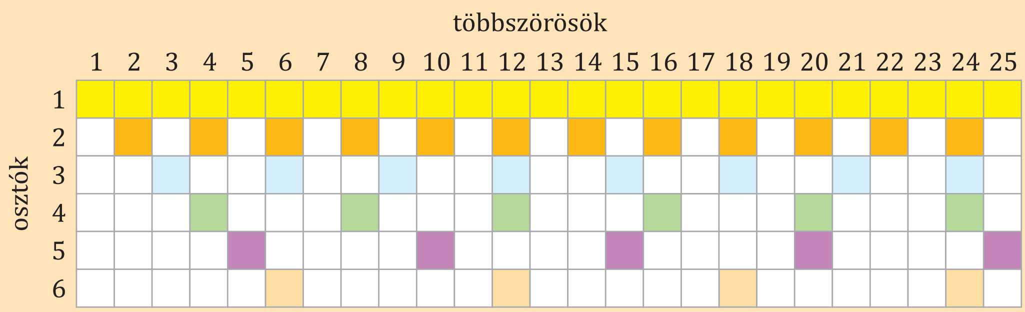
Döntsétek el sorsolással, ki lesz az irányító, majd az osztályt bontsátok két csoportra!
Az irányító 1-től kezdve egyesével számol.
Az egyik csoport minden második számnál tapsol.

A másik csoport minden harmadik számnál dobbant.
Figyeljétek meg, mely számoknál volt taps!
Mely számoknál volt dobbantás?
Mely számoknál volt taps és dobbantás is?
Ismételjétek meg a feladatot minden harmadik és minden negyedik számmal is! Találjatok a „zenekar” egyes csoportjaihoz új hangzást!

1. példa

Szofi azt a házi feladatot kapta, hogy a füzetében 1-től 25-ig számozza be az oszlopokat, és az első 6 sorban számozza be, és színezze ki azokat a négyzeteket, ahol a sorhoz tartozó szám osztja az oszlophoz tartozó számot.

Megoldás



Szofiék osztályában az ábra alapján több dolgot is észrevettek.

1. észrevétel:
Minden sorban a sorszámhoz tartozó többszörösöket színezték be. Például a harmadik sorban beszínezett négyzetekhez tartozó számok a 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24. Ezek a számok a 3 **többszörösei**, oszthatók 3-mal.

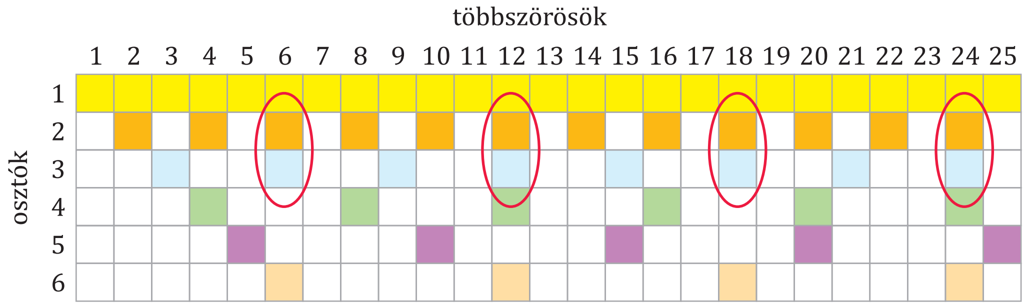
2. észrevétel:
Az oszlopokhoz csak azokban a sorokban tartozik színezett négyzet, amelyek sorszámával az oszlop száma osztható. Például a 6. oszlopnál az 1, 2, 3, 6 színezett, ezek a számok a 6 **osztói**.

3. észrevétel:
Az 1 minden természetes számnak osztója, hiszen minden természetes szám többszöröse az 1-nek.

4. észrevétel:
Minden pozitív természetes szám osztója önmagának, mert $1 \cdot 1 = 1$; $2 \cdot 1 = 2$; $3 \cdot 1 = 3$; …

12. TÖBBSZÖRÖS, KÖZÖS TÖBBSZÖRÖS

Legkisebb közös többszörös

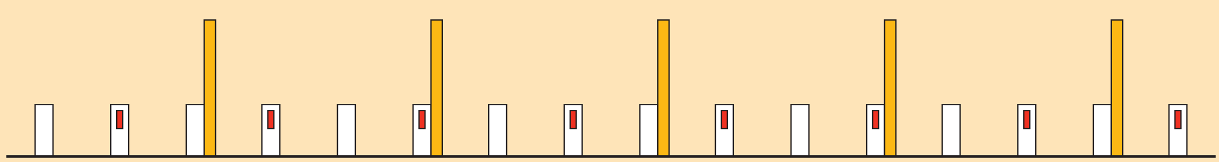


Észrevehetjük, hogy ha két sort kiválasztunk, akkor rendszeresen ismétlődve ugyanazokat az oszlopokat színezzük be. A 2. és 3. sor esetén a 6., a 12., a 18. és a 24. oszlopot.
A 6, a 12, a 18 és a 24 a 2-nek és a 3-nak is többszörösei (vagyis mindegyiknek osztója a 2 és a 3 is), ezért mondjuk, hogy ezek a számok a 2-nek és a 3-nak a **közös többszörösei.** A közös többszörösök sorozata akármeddig folytatható.
A 4-nek és 6-nak a közös többszöröseit is vég nélkül lehetne sorolni, 12; 24; 36; 48; 60; 72; …, nincsen köztük legnagyobb. A pozitív többszörösök között van viszont egy legkisebb. A példában a 2-nek és a 3-nak a legkisebb közös többszöröse a 6, 4-nek és a 6-nak a legkisebb közös többszöröse a 12.

Két szám legkisebb közös többszöröse az a szám, amely mind a kettőnek többszöröse, és a pozitív többszörösök közül a legkisebb.

2. példa

A síterepekhez vezető utakon többféle útjelző oszlop segíti a biztonságos közlekedést.
Az út szélén egyenlő távolságra elhelyezkedő fehér oszlopok közül minden másodikra fényvisszaverő jelzést tettek, hogy segítsék a sötétben az autóvezetőket. Nagy hó esetén ezek az oszlopok azonban a hó alatt vannak, és nem láthatók, ezért minden harmadik oszlop mellé narancssárga színű, körülbelül 2 méter magas műanyag csövet szúrtak.
Hányadik útjelző oszlopokon van fényvisszaverő jelzés úgy, hogy mellette narancssárga színű cső is van?



Megoldás

A 2., 4., 6., 8., 10., 12., … oszlopokon van fényvisszaverő jelzés.
A 3., 6., 9., 12., 15., … oszlopok mellett van narancssárga cső.
A közlekedést segítő kétféle jelzés a 6., a 12., a 18., … sorszámú oszlopoknál van. Ezek a sorszámok a 2 és a 3 közös többszörösei.

3. példa

Adjuk össze az $\frac{5}{24}$ és a $\frac{7}{36}$ törteket!

Megoldás

A törteket közös nevezőre kell hozni, tehát olyan számot keresünk, amelynek mindkét nevező osztója, vagyis egy közös többszöröst. A lehetséges megoldások közül célszerű a legkisebb közös többszöröst megkeresni, mert ezzel egyszerűbb a számolás.

A 24 többszörösei a 24; 48; 72; 96; 120; 144; …
A 36 többszörösei a 36; 72; 108; 144; …
A közös többszörösök a 72; 144; 216; …
A legkisebb közös többszörös a 72. $\frac{5}{24}+\frac{7}{36}=\frac{3\cdot 5}{72}+\frac{2\cdot 7}{72}=\frac{15}{72}+\frac{14}{72}=\frac{29}{72}$

Feladatok

1. A négyzetrácsos füzetben számozd meg az oszlopokat 0-tól 30-ig és a sorokat 1-től 10-ig! Minden sorban színezd ki azt a négyzetet, ahol a sor száma osztja az oszlophoz írt számot!

2. *a)* Írd le a füzetedbe az 5 és a 6 többszöröseit 60-ig! A megtalált többszörösök közül húzd alá kékkel a közös többszörösöket! Karikázd be pirossal ezek közül a legkisebbet!
b) Húzd alá zölddel azokat a számokat, amelyek az 5-nek, a 6-nak, a 10-nek és a 15-nek is többszörösei! Melyik lett ezek közül a legkisebb?

3. Biztosan emlékszel még az ötödikes könyvből a gizmákokra, a számegyenesen élő kis lényekre, akik ha tehetik, vidáman ugrándoznak a számegyenesen. Most mindhárman a 0 pontban állnak. Szepő 6, Kita 8, Zumó 9 egységnyit ugrik egyszerre.

a) Melyek lesznek azok a számok, amiket Szepő és Kita is érint?
b) Melyek lesznek azok a számok, amelyeket Szepő és Zumó is érint?
c) Melyik lesz az az első szám, amelyikre mind a hárman ráugranak majd? Ki hány ugrás alatt ér oda?

4. *a)* Melyik az a két szám, amelynek a legkisebb közös többszöröse 12? Keress több megoldást!
b) Keress három olyan különböző számot, amelyek legkisebb közös többszöröse a 12!
c) Legfeljebb hány olyan különböző számot tudsz mondani, amelyek legkisebb közös többszöröse a 12?

5. Nagyapó műhelyében két kakukkos óra is van. Az egyikből negyedóránként kidugja a fejét egy kis kakukk, a másikon levő kismadár 20 percenként koppant egyet az óra oldalán. Ha reggel 8 órakor mozdultak meg egyszerre, hány órakor lesz ez legközelebb?

6. A sarki kisbolt akciója szerint minden 21. vásárló kap egy tábla csokit, és minden 24. vásárló kap egy doboz müzlit. Hányadik lesz az a szerencsés vásárló, aki egyszerre mindkét nyereményt megkapja?

7. Igaz-e?
a) A legkisebb közös többszörös minden közös többszörösnek osztója.
b) Egy szám osztói a szám többszörösének is osztói.
c) Két szám legkisebb közös többszöröse összes többszörösének osztója mindkét szám.
d) Két szám közös többszöröse nem lehet egyenlő egyik számmal sem.

13. OSZTÓ, KÖZÖS OSZTÓ

1. példa

a) Írjuk fel a 20 és a 36 összes osztóját! Használjunk osztópárokat!
b) Melyek azok a számok, amelyek mindkét számnak osztói?

Megoldás

a) $20 = 1 \cdot 20 = 2 \cdot 10 = 4 \cdot 5$, ezért 20 osztói: 1; 2; 4; 5; 10; 20.
$36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$, ezért 36 osztói 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36.
b) Mindkét szám osztói: 1; 2; 4.

2. példa

Gazsi és Panni 48 autós és 18 lovas matricát oszt szét jutalmul az alsósok között. Igazságosak szeretnének lenni. Azt szeretnék, ha minden jutalmazott gyerek ugyanannyi autós, illetve lovas matricát kapna. Így hány alsós gyereket tudnak jutalmazni? Hány autós és lovas matricát kaphat egy-egy gyerek?

Megoldás

Mivel egyenlően kell elosztani a matricákat a gyerekek között, ezért a jutalmazott gyerekek száma csak olyan lehet, hogy a számuk osztója a 48-nak és a 18-nak is.
A 48 osztói: 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48.
A 18 osztói: 1; 2; 3; 6; 9; 18.

A **közös osztók:** 1, 2; 3; 6. A jutalmazott gyerekek száma csak 1, 2, 3 vagy 6 lehet.

Jutalmazott gyerekek száma	Autós matricák száma / gyerek	Lovas matricák száma / gyerek
1	48	18
2	24	9
3	16	6
6	8	3

A 48-nak és a 18-nak a 6 a legnagyobb közös osztója.

3. példa

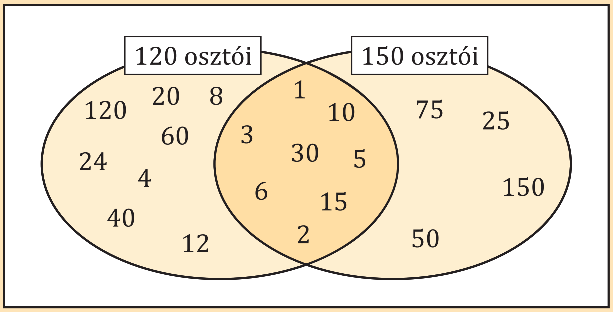
a) Soroljuk fel a 120 és a 150 osztóit! Használjunk osztópárokat!
b) Írjuk be halmazábrába a 120 és a 150 osztóit! Soroljuk fel a közös osztókat, és határozzuk meg a legnagyobb közös osztót!

Megoldás

a) 120 osztói osztópárok felírásával: $1 \cdot 120 = 2 \cdot 60 = 3 \cdot 40 = 4 \cdot 30 = 5 \cdot 24 = 6 \cdot 20 = 8 \cdot 15 = 10 \cdot 12$, ezért a 120 osztói 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 15; 20; 24; 30; 40; 60; 120.

150 osztói osztópárok felírásával: $1 \cdot 150 = 2 \cdot 75 = 3 \cdot 50 = 5 \cdot 30 = 6 \cdot 25 = 10 \cdot 15$, ezért a 150 osztói 1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 25; 30; 50; 75; 150.

b)



A 120 és a 150 közös osztói a két halmaz metszetében vannak.
Ezek az 1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30.
A legnagyobb közös osztó a 30.

Két szám osztói közül azokat, amelyek mindkét számnak osztói, a két szám közös osztóinak nevezzük.

Két szám legnagyobb közös osztója az a szám, amely mind a kettőnek osztója, és a pozitív osztóik közül a legnagyobb.

Mivel az 1 minden egész számnak osztója, ezért bármely két egész számnak van közös osztója.

Egy szám osztója nem lehet nagyobb, mint a szám, ezért az osztók között van legnagyobb, így bármely két számnak van legnagyobb közös osztója.

4. példa

Egyszerűsítsük a $\frac{24}{36}$ törtet!

Megoldás

A törtet úgy egyszerűsítjük, hogy a számlálóját és a nevezőjét elosztjuk valamelyik közös osztóval. Ezt ismételgetjük, amíg csak találunk 1-nél nagyobb közös osztót.

$$\frac{24}{36} = \frac{\overset{12}{\cancel{24}}}{\underset{18}{\cancel{36}}} = \frac{\overset{6}{\cancel{12}}}{\underset{9}{\cancel{18}}} = \frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{2}{3}$$

A leghatékonyabbak akkor vagyunk, ha rögtön a legnagyobb közös osztóval, 12-vel egyszerűsítünk.

$$\frac{\overset{2}{\cancel{24}}}{\underset{3}{\cancel{36}}} = \frac{2}{3}$$

A törtet egyetlen lépésben úgy egyszerűsíthetjük, hogy a számláló és a nevező legnagyobb közös osztójával osztjuk a számlálót és a nevezőt.

Feladatok

1. Megadjuk egy szám két többszörösét. Mi lehet az eredeti szám?
a) 9 és 15 *b)* 14 és 35 *c)* 5 és 11 *d)* 40 és 60

2. Sorold fel a következő számpárok közös osztóit, és jelöld meg a legnagyobb közös osztót!
a) 5 és 15 *b)* 10 és 15 *c)* 24 és 18 *d)* 6 és 12

3. Sorold fel a 22, 32, 36, 54, 88 számok összes osztóját!
a) Melyek azok a számok, amelyek minden színes számnak osztói?
b) Mely számok osztói a 32-nek és a 88-nak is? Melyik ezek közül a legnagyobb?
c) Melyek azok a színes számok, amelyeknek a legnagyobb közös osztója 18?

4. Határozd meg a következő számok legnagyobb közös osztóját!
a) 9 és 15 *b)* 30 és 18 *c)* 1 és 5 *d)* 100 és 60 *e)* 9 és 9
f) 10, 20 és 30 *g)* 4, 6 és 8 *h)* 3, 4 és 5 *i)* 21, 42 és 48 *j)* 12, 36 és 108

5. Egyszerűsítsd a törteket a legnagyobb közös osztójukkal!
a) $\frac{24}{36}$ *b)* $\frac{42}{56}$ *c)* $\frac{12}{20}$ *d)* $\frac{33}{55}$ *e)* $\frac{39}{52}$ *f)* $\frac{36}{45}$

6. A gondos rókapapa 8 tyúkot, 12 kakast és 20 kacsát hordott haza a faluszéli tanyáról éhes csemetéinek.
a) Hány rókakölyök várhatta otthon a papát, ha mindegyik minden zsákmányból ugyanannyit kapott, és csak a kölykök ettek belőle?
b) A szomszéd rókalyukban lakó családfő ugyanennyi szárnyast vitt a családjának, de a szülők megettek a zsákmányból 2 tyúkot, 3 kakast és 2 kacsát. Hány kölyök lehet ebben a családban, ha mindegyiknek minden zsákmányból ugyanannyi jutott?

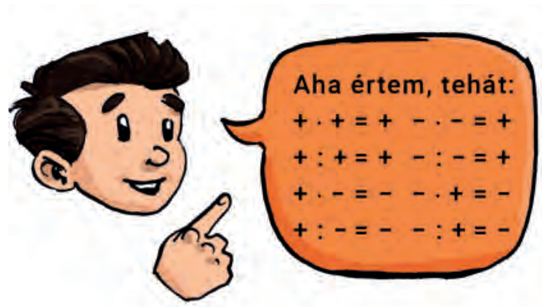
7. Tavaly télen a hatodik évfolyam diákjai 60 db zöld, 90 db kék és 300 db piros hógolyót vásároltak a sarki jégboltban. Minden színből minden gyerek ugyanannyit kapott. Hányan lehettek legfeljebb, és hány hógolyó jutott ebben az esetben fejenként a gyerekeknek az egyes színekből?

8. Igaz-e?
a) Két páros szám legnagyobb közös osztója páros.
b) Két páratlan szám legnagyobb közös osztója páratlan.
c) Páros és páratlan szám legnagyobb közös osztója lehet páros.
d) Két szám minden közös osztója osztója a legnagyobb közös osztójuknak.
e) A nulla soha nem lehet legnagyobb közös osztó.
f) Két szám közös osztójának nem lehet osztója a két szám.

A fejezet első három leckéjében az ötödik osztályos ismeretek felidézése után az előjeles számok szorzását és osztását tanultuk.

Megjegyzendő **előjelszabály:**

- **Ha a szorzás mindkét tényezője vagy az osztásban az osztandó és az osztó is egyező előjelűek, akkor az eredmény pozitív.**
- **Ha a szorzás mindkét tényezője vagy az osztásban az osztandó és az osztó különböző előjelűek, akkor az eredmény negatív.**



A már megismert műveleti tulajdonságok és a zárójelek alkalmazására tanult szabályok az előjeles számokkal végzett műveletek esetén is érvényesek.

Ha egy műveletsorban az összeadás és a kivonás mellett szorzás vagy osztás szerepel, akkor először az utóbbi műveleteket végezzük el.

Például:

$-42 + (-6) \cdot (+3) = -42 + (-18) = -60$

$66 - (+180) : (-4) = 66 - (-45) = 66 + 45 = 111$

Ha a műveletek sorrendjét zárójelek használatával kijelöljük, akkor először a zárójelben lévő műveleteket kell elvégezni.

Például:

$(-48 + 6) \cdot (-3) = (-42) \cdot (-3) = (+126)$

$(56 + (-41)) : (-5) = (56 - 41) : (-5) = (15) : (-5) = (-3)$

A természetes számok körében az osztó és a többszörös fogalmakat tanultuk.

Ha egy természetes szám maradék nélkül osztható egy másikkal, akkor azt mondjuk, hogy osztható vele. Például a 15 osztható 3-mal. Ekkor a 3 **osztója** a 15-nek.

Azt is mondhatjuk, hogy a 15 **többszöröse** a 3-nak, mert $15 = 5 \cdot 3$.
A 3 nem osztója a 17-nek, és a 17 nem többszöröse a 3-nak.

Az 1 minden számnak osztója.

A 0 minden pozitív egész számnak többszöröse, de a 0 nem osztója egyetlen pozitív egész számnak sem.

Az osztók száma alapján két nagy csoportba sorolhatjuk a természetes számokat.
Pontosan két darab pozitív osztója van: 2; 3; 5; 7; 11; 13; … Ezeket prímszámoknak nevezzük.
Kettőnél több pozitív osztója van: 4; 6; 8; 9; 10; 12; … Ezeket összetett számoknak nevezzük.
Az 1 egyik csoportba sem tartozik, mert csak egy pozitív osztója van, önmaga.

Az oszthatósági szabályok ismerete megkönnyíti annak eldöntését, hogy egy adott szám osztható-e egy másik számmal.

A **számok utolsó számjegye alapján** eldönthető, hogy egy szám osztható-e 2-vel, 5-tel vagy 10-zel.

A **szám utolsó két helyén álló kétjegyű szám alapján** eldönthető, hogy a szám osztható-e 4-gyel vagy 100-zal.

A **szám számjegyeinek összege alapján** eldönthető, hogy egy szám osztható-e 3-mal vagy 9-cel.

14. ÖSSZEFOGLALÁS

További oszthatósági szabályokat lehet megállapítani a tanult oszthatósági szabályok felhasználásával. Ezeket összetett oszthatósági szabályoknak nevezzük.

Egy számnak tetszőlegesen sok többszöröse van.

Két számnak nagyon sok közös többszöröse van, a felsorolásuk mindig folytatható. A közös többszörösök között mindig van legkisebb.

Például 12 és 15 néhány többszöröse, közülük kiszínezve a közös többszörösök:
12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96; 108; 120; 132; ...
15; 30; 45; 60; 75; 90; 105; 120; 135; 150; ...

Két szám közös osztói megkereshetők a számok osztóinak felírásával. Az osztókat osztópárok felírásával is megtalálhatjuk. Közös osztó mindig létezik, mert az 1 minden számnak osztója. A közös osztók között mindig van legnagyobb.

Például 24 és 40 osztói között kiszínezve a két szám közös osztói:
24 osztói: 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24
40 osztói: 1; 2; 4; 5; 8; 10; 20; 40

Feladatok

1. Gergő, Vince, Luca és Nóri, a négy testvér egy csúszdás víziparkban jártak a nyáron. Hányféleképpen állhatnak sorba, ha Nóri megígérte a szüleiknek, hogy nagyon vigyáz Gergőre, így mindig mögötte kell állnia?

2. Végezd el a következő műveleteket!

a) $(-15) \cdot (+4) : (-5)$

b) $(-120) : [(-4) \cdot (+6)]$

c) $[(+180) : (-15)] \cdot [(-50) : (-25)]$

d) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$

e) $(-18) : (+3) + (-2) \cdot (-9)$

f) $(-371 - 229) : (-200) + (+321) : (+3) \cdot (-1)$

g) $(-512) : (+8) - (-49) : (-7)$

h) $(+284 - 203) : (-9) \cdot (+2) - (+14) \cdot (-5)$

3. A Szubtraktion cég augusztus havi számláján −1 200 000 Ft volt a záró összeg (egyenleg). A bank a tartozásokat negatív számként kezeli a számlákon. Szeptemberben a táblázatban látható összegek kerültek a számlára (bevétel), illetve lettek kifizetve (kiadás).

a) Hány forint bevétele volt a cégnek szeptemberben?

b) Hány forint kiadása volt a cégnek szeptemberben a banki költséggel együtt?

c) Hány forint volt a cég szeptember 30-i záró egyenlege?

Bevétel/Kiadás	Banki költség	Dátum
+ 360 000	0	2021. 09. 03.
+ 2 300 000	0	2021. 09. 03.
−240 000	−600	2021. 09. 10.
−302 000	−750	2021. 09. 10.
−482 000	−800	2021. 09. 12.
+ 1 111 000	0	2021. 09. 19.
−1 012 000	−1200	2021. 09. 24.
	−2990	2021. 09. 30.

4. Egy számról tudjuk, hogy osztható 12-vel. Milyen számokkal osztható még biztosan?

5. Egy számról tudjuk, hogy az utolsó két számjegyéből álló szám 20. Mivel osztható biztosan?

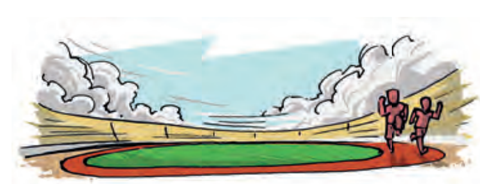
6. *a)* Készíts 2-vel osztható négyjegyű számokat ezekből a számkártyákból!
b) Készíts 5-tel osztható négyjegyű számokat ezekből a számkártyákból!
c) Készíts 3-mal osztható négyjegyű számokat ezekből a számkártyákból!
d) Készítsd el a 3-mal osztható összes háromjegyű számot ezekből a számkártyákból!

7. Határozd meg a két szám legkisebb közös többszörösét!
a) 50 és 250 *b)* 17 és 14 *c)* 52 és 12 *d)* 24 és 84

8. Hozd közös nevezőre a törteket, és számold ki az összegüket, különbségüket!
a) $\frac{11}{6}$ és $\frac{3}{8}$ *b)* $\frac{13}{6}$ és $\frac{2}{15}$ *c)* $\frac{9}{10}$ és $\frac{5}{18}$ *d)* $\frac{11}{3}$ és $\frac{3}{8}$

9. Határozd meg a két szám legnagyobb közös osztóját!
a) 9 és 27 *b)* 8 és 9 *c)* 8 és 512 *d)* 231 és 132

10. Két futó edz a körpályán. Egyszerre indultak. Az egyik 10 percenként két kört tesz meg, a másik pedig 3 kört. Az indulástól számítva mikor haladnak át legközelebb egyszerre a startvonalon?



11. A 66 lapos kártyapakliban 6 kincs, 12 védelem és 18 életerő-csökkentő kártya van. A többi kártyán akciók vannak. Hány gyerek játszhat ezzel a játékkal, ha minden kártyát szét kell maguk között osztani, és minden gyerek minden kártyafajtából ugyanannyi darabot kap?

12. Az elkényeztetett királylány sorba állította 100 kérőjét. Minden másodikat délcegnek és minden harmadikat bátornak nyilvánított. Végül a délcegnek és bátornak is kijelölt kérők vehettek részt a hétpróbás viadalon, melynek győztese elnyerte a királylány kezét. Hányan indultak a viadalon?

13. A palota dísztermében 30 lámpakapcsoló volt, és egyetlen lámpa sem világított. A lámpák egy nyomásra bekapcsolnak, és az újabb nyomásra kikapcsolnak. A király megparancsolta, hogy legalább a lámpák felét kapcsolják fel. Az udvari bolond először megnyomta az összes kapcsolót, aztán minden másodikat, aztán minden harmadikat, aztán minden negyediket, aztán minden ötödiket és végül minden hatodikat.
a) Teljesült a király parancsa?
b) Hányadik kapcsolóhoz tartozó lámpák világítottak?
c) Hogyan lehet eldönteni egy tetszőleges sorszámú kapcsolóról, hogy világít-e a hozzá tartozó lámpa?

14. ÖSSZEFOGLALÁS

Tesztfeladatok

Lóci jelentkezett a „Jaj nekem, szeretem a matekot!” online játékba. Oldd meg az alábbi tesztfeladatokat, és segíts összegyűjteni Lócinak a játék megkezdéséhez szükséges képességeket!

1. Hány művelet eredménye (–60)?

(–2) · (–30)	(–2) · (–3) · (–10)	(+180) : (–3)	(–5) · (–12) · (–1)
(–1) · (–1) · (+60)	(+5) · (–2) · (–6)	(+30) · (+8) : (–4)	(–720) : (+4) : (–3)

1 db → 1 erősségű páncélzat
2 db → 2 erősségű páncélzat
3 db → 3 erősségű páncélzat
4 db → 4 erősségű páncélzat

2. Hány darab 5-tel vagy 10-zel osztható számot találsz a következő összegek között?

982 + 1028, 98 101 + 484, 528 602 + 431, 497 317 + 5983, 59 + 817 + 5964

1 db → 1 erősségű gyógyítás
2 db → 2 erősségű gyógyítás
3 db → 3 erősségű gyógyítás
4 db → 4 erősségű gyógyítás

3. Hány darab 4-gyel és 6-tal osztható számot találsz a következő számok között?

158, 456, 1932, 2248, 4250, 12 578, 18 936

1 db → 0 életerőadás
2 db → 1 életerőadás
3 db → 2 életerőadás
4 db → 3 életerőadás

4. Hány darab osztója van a 84-nek?

8 db → 1 erősségű gyorsaság
10 db → 2 erősségű gyorsaság
12 db → 3 erősségű gyorsaság
14 db → 4 erősségű gyorsaság

5. Mi a legnagyobb közös osztója a 12, 42, 90 számhármasnak?

2 → 10 másodperc láthatatlanság
4 → 20 másodperc láthatatlanság
6 → 30 másodperc láthatatlanság
8 → 40 másodperc láthatatlanság

6. Mi a legkisebb közös többszöröse a 15, 21, 35 számhármasnak?

105 → 1 erősségű fegyverhasználat
210 → 2 erősségű fegyverhasználat
315 → 3 erősségű fegyverhasználat
70 → 4 erősségű fegyverhasználat

7. Hány hamis állítást találsz az alábbiak között?

A legnagyobb közös osztó a közös osztók közül a legnagyobb.
A legkisebb közös többszörös a közös többszörösök közül a legnagyobb.
0-nak 0 az ellentettje.
–3-nak +3 az ellentettje.
Két azonos előjelű, nem nulla szám szorzata biztosan pozitív.

1 db → 1 erősségű sebzés
2 db → 2 erősségű sebzés
3 db → 3 erősségű sebzés
4 db → 4 erősségű sebzés

8. A 2 4 6 8 számkártyákból hány különböző négyjegyű számot tudunk készíteni úgy, hogy minden számkártyát csak egyszer használunk fel?

24 db → 1 erősségű fegyver
20 db → 2 erősségű fegyver
16 db → 3 erősségű fegyver
12 db → 4 erősségű fegyver

II. Törtek

Az osztálykirándulás hasonlóan kezdődött, mint a tavalyi. Két napja puszikat adtak anyának és apának, integettek a kikötőben, és felszálltak a helyi menetrend szerinti Hold-járatra. Éppen időben érkeztek ahhoz, hogy elcsípjenek egy földfelkeltét, aztán át kellett szállniuk. A Féreglyuk Expressz bérelt hajója a Hold körüli pályáról indult. Az osztály már tavaly is a FérExszel akart utazni, és most, hogy valóra vált az álmuk, lecsukták a szemüket, és figyelték a gyomrukban megjelenő gyenge remegést.

– A hajó indulásra kész – jelezte a központi számítógép. Holdidő szerint 13:00-kor start.

Panni, Gazsi és Gerzson is becsatolta a rögzítő hevedereket, és felnéztek Attilára, aki a kirándulást szervezte.

– Irány a Reciprok – mosolygott Attila, aki tavaly óta nem lett kevésbé okos, de jóval megfontoltabbnak tűnt, így a korábbi „Okoska” becenév is kezdett lekopni róla.

– Olyan bolygó nincs is a Naprendszerben – kapta fel a fejét Berta.

– Nincs bizony! – bólogatott Attila –, de a FérExszel mindegy, milyen távoli a cél. A Reciprok különleges hely. Ott minden törtet egészek reciprokaiból raknak össze, például $\frac{3}{4}$ helyett azt mondják: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

– Törtidő alatt odaérünk – vigyorgott Attila.

– Már ha nem törjük össze magunkat – csatlakozott hozzá Zsombor.

– És persze, ha az utazás meg nem tizedel minket – kapcsolódott be Szofi is a mókázásba.

Észre sem vették, amikor a csillagok egy pillanatra kihunytak körülöttük, és megkezdték utazásukat.

1. MIT TANULTUNK A TÖRTEKRŐL? ISMÉTLÉS

Csoportmunka

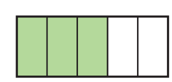
Alakítsatok 4 fős csoportokat! Minden csoport készítsen elő a feladat megoldásához rajzlapot és színes ceruzákat!
Válasszatok egy 1-nél kisebb pozitív törtet! Készítsetek olyan rajzot, amelyik a kiválasztott törtet szemlélteti!
A rajzlap másik oldalára készítsetek egy általatok megadott, 1-nél nagyobb, de 5-nél kisebb törtet szemléltető ábrát! Az ábrára ne írjátok rá a választott törtet, azt egy másik csoportnak kell majd kitalálnia!
Ha elkészítettétek a rajzokat, akkor a csoport egy képviselője mutassa be, és magyarázza el az első ábrát az osztálynak. A csoport egy másik tagja találtassa ki a többiekkel a második ábrán szemléltetett törtet!
Figyeljetek arra, hogy az ábráitok jól láthatók legyenek!

Ismételjük át a tavaly tanultakat!

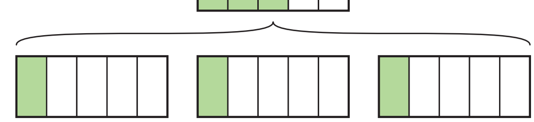
Hogyan értelmezzük a $\frac{3}{5}$-öt?

$\frac{3}{5}$ — számláló, törtvonal, nevező

Vagy: 1 egészet 5 egyenlő részre osztunk, és a részekből 3-at veszünk.



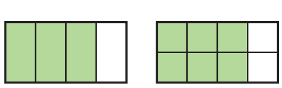
Vagy: 3 egész mindegyikéből egy-egy ötödrészt veszünk.



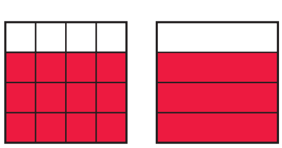
A $\frac{3}{5}$ két egész szám hányadosa, vagyis racionális szám.

Ha a tört nevezőjében 1 áll, akkor az **egész szám** $\left(\frac{3}{1} = 3 \text{ vagy } 5 = \frac{5}{1}\right)$.

Használhatunk vegyes tört alakot is, ha a tört értéke 1-nél nagyobb. $3\frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5} = \frac{15}{5} + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$



A törtet **bővíthetjük,** vagyis ugyanazzal a (nem 0) számmal szorozhatjuk a számlálóját és a nevezőjét. Például: $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$. A tört értéke nem változik.



A törtet **egyszerűsíthetjük,** vagyis a számlálóját és a nevezőjét ugyanazzal a (nem 0) számmal oszthatjuk. Például: $\frac{12}{16} = \frac{12:4}{16:4} = \frac{3}{4}$. A tört értéke nem változik.

Két törtet **összehasonlíthatunk** egymással.

Vagy közös nevezőre hozzuk őket, és a számlálókat hasonlítjuk össze,

vagy úgy alakítjuk át a törteket, hogy azonos legyen a számlálójuk, és a nevezőjüket hasonlítjuk össze.

Például:

$\frac{4}{6} > \frac{3}{6}$; $\quad -\frac{4}{6} < -\frac{3}{6}$;

$\frac{2}{3} > \frac{2}{4}$; $\quad -\frac{2}{3} < -\frac{2}{4}$.

Egyenlő nevezőjű pozitív törtek közül az a nagyobb, amelyiknek a számlálója nagyobb.
Egyenlő számlálójú pozitív törtek közül az a nagyobb, amelyiknek a nevezője kisebb.

Két tört **összeadás**akor közös nevezőre hozunk, majd a számlálókat összeadjuk.

Például: $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$

Az összeadás tagjait felcserélhetjük.

$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$

Két tört **kivonás**akor közös nevezőre hozunk, majd a kisebbítendő számlálójából kivonjuk a kivonandó számlálóját.

$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$

A kisebbítendőt és a kivonandót nem cserélhetjük fel.

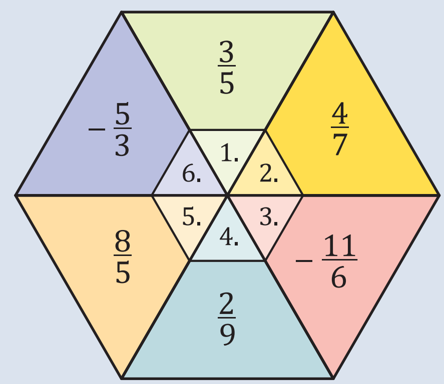
$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ $\quad \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$

Játék

Üljetek 3–4 fős csoportokba, és egyikőtök dobjon egy dobókockával egymás után háromszor!

Az első két dobás megadja azoknak a törteknek a sorszámát, amelyekkel műveletet végzünk, a harmadik pedig azt, hogy összeadni vagy kivonni kell-e ezeket. Ha a harmadik dobás páros, akkor összeadni kell a két számot, ha páratlan, akkor az elsőnek kidobott számból ki kell vonni a másodikként dobott számot.

Az nyer, aki elsőként számolja ki hibátlanul a kapott művelet eredményét. Játsszatok annyi kört, hogy mindenki legalább egyszer dobhasson!



Ha egy törtet **szorzunk** egy természetes számmal, akkor

Például:

vagy a tört számlálóját megszorozzuk a természetes számmal, a nevezőt pedig változatlanul leírjuk,

$\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{15}{4}$

vagy a tört nevezőjét osztjuk a természetes számmal, a számlálót pedig változatlanul leírjuk.

$\frac{5}{12} \cdot 3 = \frac{5}{12 : 3} = \frac{5}{4}$

Ha egy törtet **elosztunk** egy pozitív egész számmal, akkor

vagy a tört számlálóját osztjuk a pozitív egész számmal, és a tört nevezőjét változtatás nélkül leírjuk,

$\frac{18}{7} : 6 = \frac{18 : 6}{7} = \frac{3}{7}$

vagy a tört nevezőjét megszorozzuk a pozitív egész számmal, és a tört számlálóját változtatás nélkül leírjuk.

$\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$

Szorzásnál a szorzótényezők felcserélhetők.

Osztásnál az osztandó és az osztó nem cserélhető fel.

Ha a törtek szorzása és osztása során negatív számok is vannak, akkor a már tanult előjelszabályt alkalmazzuk.

Feladatok

1. Egyszerűsítsd a következő törteket, majd bővítsd őket úgy, hogy a nevezőjük 60 legyen!
Például: $\frac{52}{65} = \frac{4}{5} = \frac{48}{60}$.

a) $\frac{12}{18}$ *b)* $-\frac{21}{28}$ *c)* $-\frac{10}{25}$ *d)* $\frac{72}{54}$ *e)* $-5\frac{13}{65}$ *f)* $4\frac{18}{27}$

2. Igaz vagy hamis?
a) A tört számlálója lehet 0. *b)* A tört nevezője lehet 0.
c) A tört nevezője a törtvonal feletti szám.
d) A tört nevezője megmutatja, hogy hány részre osztjuk az egészet.
e) A $\frac{11}{8}$-hoz $\frac{3}{8}$-ot kell adni, hogy 1-et kapjunk.
f) A $-\frac{5}{4}$ és a $-\frac{40}{34}$ tört egyenlő. *g)* $\frac{5}{4} > \frac{6}{4}$ *h)* $\frac{5}{4} < \frac{4}{3}$

3. Mi kerülhet a ▲ helyébe, hogy igaz legyen az egyenlőség?

a) $\frac{4}{6} + \frac{▲}{6} = 2$ $\frac{5}{2} + \frac{▲}{2} = 2$ $\frac{7}{12} - \frac{▲}{12} = 2$ $\frac{11}{4} + \frac{▲}{4} = 2$

b) $-\frac{5}{3} + \frac{▲}{3} = 5$ $\frac{12}{1} + \frac{▲}{1} = 5$ $\frac{11}{2} + \frac{▲}{2} = 5$ $\frac{7}{4} - \frac{▲}{4} = 5$

c) $\frac{5}{7} + \frac{▲}{7} = -1$ $-\frac{9}{8} - \frac{▲}{8} = -1$ $\frac{1}{11} + \frac{▲}{11} = -2$ $\frac{5}{6} + \frac{▲}{6} = -2$

4. Melyik nagyobb?
a) $\frac{3}{4}$ fele vagy $\frac{1}{8}$ duplája? *b)* $\frac{3}{4}$ harmada vagy $\frac{1}{8}$ duplája?
c) $\frac{6}{5}$ fele vagy $\frac{1}{10}$ duplája? *d)* $\frac{6}{5}$ harmada vagy $\frac{1}{10}$ duplája?
e) $1\frac{5}{7}$ fele vagy $\frac{6}{14}$ duplája? *f)* $1\frac{5}{7}$ hatoda vagy $\frac{6}{14}$ fele?

5. Végezd el az alábbi műveleteket! Ügyesen csoportosítva könnyebb lesz a számolás.
a) $\frac{5}{11} + \frac{23}{19} - \left(-\frac{6}{11}\right) - \frac{4}{19}$ *b)* $-\frac{1}{5} + \frac{6}{16} - \frac{16}{20} + 1\frac{5}{8}$
c) $\frac{1}{2} - \left(-1\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{10} - \frac{2}{3}$ *d)* $\frac{1}{6} + \left(-\frac{12}{8}\right) + 1\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

6. *a)* Postás Palkó kiosztotta a levelek hatodát, aztán az ötödét, végül a negyedét. A levelek hányad részét kell még kiosztania?
b) Postás Piri kiosztotta a levelek hatodát, aztán a maradék ötödét, végül a maradék negyedét. A levelek hányad részét kell még kiosztania?

7. Anya a hármas ikreinek összesen 9 db dobozos üdítőt $\left(2\frac{7}{10}\text{ kg}\right)$, 6 db egyforma szendvicset $\left(1\frac{1}{5}\text{ kg}\right)$ és 3 zacskó kekszet $\left(\frac{3}{4}\text{ kg}\right)$ csomagolt. Hány dkg elemózsiát kapott egy gyerek?

8. Alabárban, a híres pattogi versenyen idén is elindult Jancsi és Juliska, a tavalyi bajnok páros. A verseny lényege, hogy egymással szemben, páros lábon ugrálva kell 1 km-t megtenniük a versenyzőknek a lehető legkevesebb idő alatt. Jancsi 1 másodperc alatt $\frac{5}{3}$ métert, Juliska $\frac{10}{9}$ métert tesz meg. Hány perc alatt teljesítik az 1 km-es távot?

9. A királykisasszony hét próbája

Törtország királyának volt egy szép és az okosságáról messze földön híres lánya, Törtilla. Matematikafeladatokban senki sem volt jobb nála. A király kijelentette tanácsadóinak, hogy csak az maradhat továbbra is nagy méltóságú hivatalában, aki megoldja Törtilla 7 próbáját. (A füzetedben számolj!)

1. próba: Egyszerűsítsd a következő törteket, majd állítsd növekvő sorrendbe őket!

$-\frac{2}{10}$ $\frac{6}{36}$ $-\frac{9}{6}$ $\frac{14}{60}$ $-\frac{14}{35}$ $\frac{63}{70}$ $\frac{4}{12}$ $\frac{25}{5}$ $-\frac{1200}{10}$

2. próba: Mely összegek eredménye egyenlő?

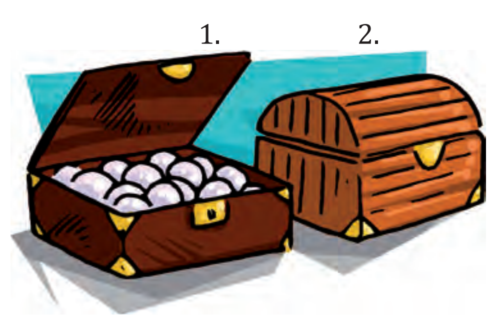
a) $\frac{5}{8}+\frac{1}{6}$ *b)* $\frac{1}{5}+\frac{6}{15}$ *c)* $\frac{1}{3}+\frac{4}{15}$ *d)* $\frac{1}{3}+\frac{2}{2}$ *e)* $\frac{1}{4}+\frac{7}{12}$ *f)* $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}$

3. próba: Melyik kivonás eredménye kisebb $\frac{37}{60}$-nál?

a) $\frac{5}{8}-\frac{1}{6}$ *b)* $\frac{4}{5}-\frac{1}{6}$ *c)* $\frac{2}{3}-\frac{2}{5}$ *d)* $\frac{19}{20}-\frac{5}{12}$

4. próba: – A nyakláncom hányad részét tartom a kezemben? – kérdezte a királykisasszony. – Ha megszoroznám 5-tel és osztanám 3-mal, akkor a nyakláncom $\frac{10}{21}$ része lenne-e a kezemben?

5. próba: A főszakács a megmaradt torta $\frac{15}{24}$ részét az 5 kukta között egyenlően elosztotta. A megmaradt torta hányad részét kapta egy-egy kukta?



6. próba: – E két dobozban igazgyöngyöket tartok. Az első dobozban 13 egyforma igazgyöngy van, és értékük összesen 25 tallér. A második dobozban 9 ugyancsak egyforma igazgyöngy van 20 tallér értékben. Melyik dobozban értékesebb egy igazgyöngy?

7. próba: Számítsd ki sorban a műveletek eredményét!

$\frac{15}{24} \xrightarrow{\cdot 2}$ ………… $\xrightarrow{:3}$ ………… $\xrightarrow{+\frac{2}{9}}$ ………… $\xrightarrow{-\frac{11}{36}}$ …………

(A végén 25 tanácsadóból csak 10 maradt. A többieket azóta is Törtilla tanítja.)

2. SZORZÁS TÖRTTEL, A RECIPROK

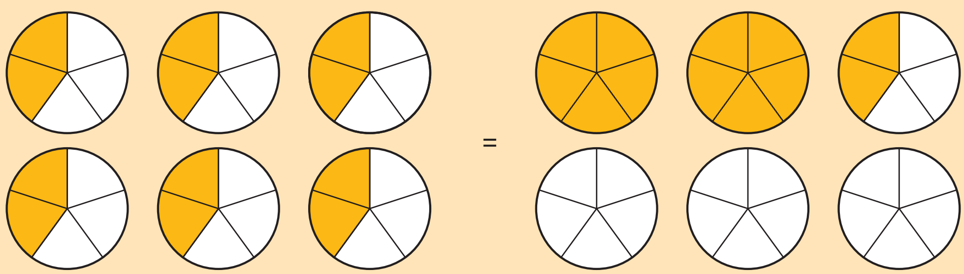
1. példa

A diákszínjátszó kör 6 pizzát rendelt az előadás főpróbája előtt. A 6 pizza $\frac{2}{5}$ része megmaradt a próba végére. Mennyi pizzát lehetett megenni a próba végén?

Megoldás

6-nak a $\frac{2}{5}$ része egyenlő 6-nak a $\frac{2}{5}$-szeresével.

Minden pizzát 5 egyenlő részre osztottunk és 2 részt színeztünk be. A részeket egymás mellé téve láthatjuk, hogy $6 \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$.



Összesen 2 egész és még $\frac{2}{5}$ rész pizzát lehetett megenni a próba végén.

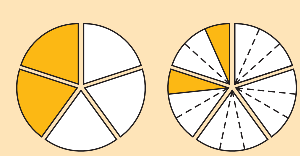
2. példa

Az 1. példában megmaradt pizzából a 2 egész nagyon gyorsan elfogyott. Három szereplő később érkezett, így nekik a maradék $\frac{2}{5}$ pizzán kellett igazságosan osztozni. Egy egész pizza mekkora része jutott a későn érkezőknek?

Megoldás

A $\frac{2}{5}$-nek az $\frac{1}{3}$ része jutott a később érkezőknek, ezért azt kell kiszámolni, hogy $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$ mennyivel egyenlő.

A $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$ azt jelenti, hogy a $\frac{2}{5}$-nek vesszük az $\frac{1}{3}$ részét, vagyis az ötödrészekből 2 db-ot felosztunk 3-3 részre, és a kisebb részekből veszünk egyet-egyet. Az eredmény $\frac{2}{15}$.



$$\frac{2}{5} : 3 = \frac{2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$$

Megfigyelhetjük, hogy a törtek szorzásakor a számlálót a számlálóval, nevezőt a nevezővel szoroztuk: $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$

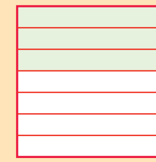
3. példa

Mennyi lesz a $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5}$ szorzás eredménye?

Megoldás

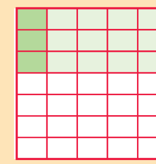
Ábrázoljuk a szorzást egy olyan négyzetben, aminek a területe 1 egész! A négyzetet először vízszintes vonalakkal 7 egyenlő részre osztjuk, és ezekből 3 részt színezünk be.

$\frac{3}{7}$



A $\frac{3}{7}$ rész $\frac{1}{5}$ részét megkapjuk, ha a színes téglalapot a másik oldala mentén 5 egyenlő részre osztjuk, és ebből 1 részt veszünk.

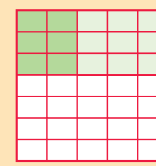
$\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{35}$



A $\frac{3}{7}$ rész $\frac{2}{5}$ része a már kiszínezett rész 2-szerese lesz.
35 kisnégyzetből összesen 6-ot színeztünk be.

$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$.

$\frac{3}{35} \cdot 2 = \frac{6}{35}$



Törtet törttel úgy szorozhatunk, hogy a számlálót a számlálóval, a nevezőt a nevezővel megszorozzuk. A számlálók szorzata lesz a szorzat számlálója, a nevezők szorzata lesz a szorzat nevezője.

4. példa

A Kincses-szigeten két kalózhorda éjt nappá téve kereste az elásott kincset, de az aranyérméknek csak a $\frac{2}{3}$ részét ásták ki. A megtalált érméket elosztották a két kalózcsapat között, és az egyes csapatok a tagok között is felosztották a nekik járó részt. Az elásott kincs hányad része jutott a hajósinasnak, ha a csapata a megtalált érmék $\frac{2}{5}$ részét kapta, és a csapaton belül az $\frac{1}{6}$ rész jutott neki?

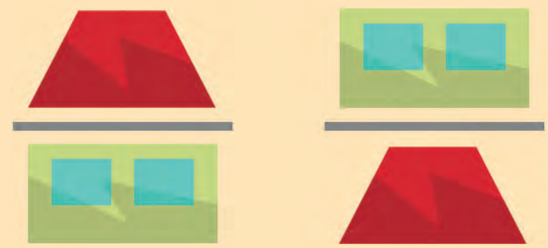
Megoldás

A megtalált kincs $\frac{2}{5}$ részének az $\frac{1}{6}$ része $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ rész. Az inas a teljes kincs $\frac{2}{3}$ részének az $\frac{1}{15}$-ét kapta meg, vagyis $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{15} = \frac{2}{45}$ részt kapott. A hajósinasnak a teljes kincs $\frac{2}{45}$ része jutott.

2. SZORZÁS TÖRTTEL, A RECIPROK

5. példa

Mennyivel kell megszorozni $\frac{4}{5}$-öt, hogy 1-et kapjunk?



Megoldás

Olyan törttel kell megszorozni a $\frac{4}{5}$-öt, hogy a szorzat számlálója és nevezője ugyanaz legyen.

Ez a szám az $\frac{5}{4}$, mert ekkor $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{20}{20} = 1$.

Ha két szám szorzata 1, akkor a számokat egymás reciprokainak nevezzük.

Például: $\frac{4}{5}$ reciproka $\frac{5}{4}$, 2 reciproka $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{7}$ reciproka $-\frac{7}{3}$.

A 0-nak nincs reciproka. (A 0-t bármelyik számmal megszorozva 0-t kapunk, sosem kaphatunk 1-et.)
1-nek a reciproka 1, és –1-nek a reciproka –1.

Feladatok

1. Számold ki az alábbi szorzatokat!

a) $\frac{2}{3} \cdot 3$ *b)* $\frac{4}{7} \cdot 7$ *c)* $\frac{11}{12} \cdot 12$ *d)* $\frac{3}{2} \cdot 6$ *e)* $\frac{7}{5} \cdot 40$ *f)* $\frac{4}{9} \cdot 12$

g) $9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$ *h)* $\frac{2}{5} \cdot (-12)$ *i)* $(-4) \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)$ *j)* $(-5) \cdot \frac{3}{9}$ *k)* $\left(\frac{-11}{1}\right) \cdot 4$ *l)* $\frac{7}{6} \cdot (-4)$

2. Számold ki az alábbi szorzatokat!

a) $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}$ *b)* $\frac{7}{6} \cdot \frac{6}{7}$ *c)* $\frac{8}{5} \cdot \frac{1}{4}$ *d)* $\frac{9}{16} \cdot \frac{1}{5}$ *e)* $\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{6}$

f) $\frac{14}{11} \cdot \frac{3}{8}$ *g)* $\frac{18}{8} \cdot \frac{4}{9}$ *h)* $\frac{6}{15} \cdot \frac{2}{9}$ *i)* $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10}$ *j)* $\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{6}$

3. Végezd el az alábbi műveleteket!

a) $1\frac{3}{11} \cdot \frac{2}{7}$ *b)* $\frac{5}{14} \cdot 2\frac{1}{3}$ *c)* $\frac{8}{5} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right) \cdot \frac{5}{6}$ *d)* $\frac{2}{15} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{3}$ *e)* $\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{-5}{3}\right) \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{-4}{7}\right)$

f) $\left(-\frac{4}{6}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$ *g)* $\frac{7}{6} \cdot \left(-\frac{4}{18}\right)$ *h)* $3\frac{3}{4} \cdot 4\frac{3}{5}$ *i)* $3\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{14}$ *j)* $-7\frac{1}{2} \cdot 5\frac{5}{6}$

4. Mely számot írhatjuk a háromszög helyére, hogy igazak legyenek az alábbi állítások?

a) $\frac{5}{7} \cdot \frac{\blacktriangle}{2} = \frac{15}{14}$ *b)* $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{11} = \frac{15}{\blacktriangle}$ *c)* $\frac{13}{44} < \frac{5}{11} \cdot \frac{\blacktriangle}{4}$ és $\frac{5}{11} \cdot \frac{\blacktriangle}{4} < \frac{31}{44}$

5. Mi a reciproka a következő számoknak?

a) $\frac{2}{3}$ *b)* $-\frac{5}{3}$ *c)* $\frac{6}{5}$ *d)* $-\frac{2}{7}$ *e)* 0 *f)* 1

g) –6 *h)* 3 *i)* $\frac{0}{5}$ *j)* $2\frac{6}{7}$ *k)* $1\frac{2}{5}$ *l)* $-2\frac{3}{8}$

6. Milyen számok kerüljenek a jelek helyére, hogy igazak legyenek az alábbi egyenlőségek?

a) $\frac{3}{7} \cdot ♥ = 1$ *b)* $2\frac{1}{4} \cdot ♦ = 1$ *c)* $♣ \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) = 1$

d) $♠ \cdot 5 = 1$ *e)* $(-9) \cdot ■ = 1$ *f)* $✹ \cdot \left(-2\frac{1}{3}\right) = 1$

7. Bea, Eszter és Gergő együtt ettek meg egy kis fagyitortát. Bea megette a torta kétharmadának a negyedét, Eszter pedig a hatodának a háromketted részét. A maradék Gergőé lett.
a) Ki hányad részét kapta meg a tortának?
b) Ha az egész torta 600 g volt, hány dkg-ot evett Gergő?

8. Jancsi és Juliska szokatlan dartstáblát találtak a gonosz banya viskójában. A tábla leírása szerint ha sikerül betalálniuk két olyan mezőbe, amelyeken lévő számok szorzata legalább 1 egész, akkor kattan egyet a zár. Azt is megtudták, hogy ha négy különböző számpárt találnak, akkor kinyílik a ketrec ajtaja, és szabadok lesznek. Létezik legalább négy cellanyitó számpár? Válaszodat számolással igazold!

9. Számítsd ki a következő szorzatokat!

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}$

b) $\frac{9}{8} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9}$

c) $\left(-\frac{13}{6}\right) \cdot \frac{11}{15} \cdot \left(-\frac{15}{11}\right) \cdot \frac{6}{13}$

d) $\frac{13}{15} \cdot \frac{4}{7} \cdot 1\frac{2}{13}$

e) $2\frac{1}{4} \cdot 4\frac{4}{9}$

f) $\left(-\frac{4}{9}\right) \cdot 1\frac{1}{7} \cdot 6\frac{1}{8} \cdot 2\frac{1}{2}$

g) $\left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{4}\right) \cdot \ldots\ldots \cdot \left(1-\frac{1}{10}\right)$

10. Nyúlfalván a csintalan nyúldiákok tréfarépát csempésztek Nyúl Béla tanár úr reggelijébe. A szokatlan eleség hatására a tanár úr az alábbi jegyeket írta a dolgozatokra.

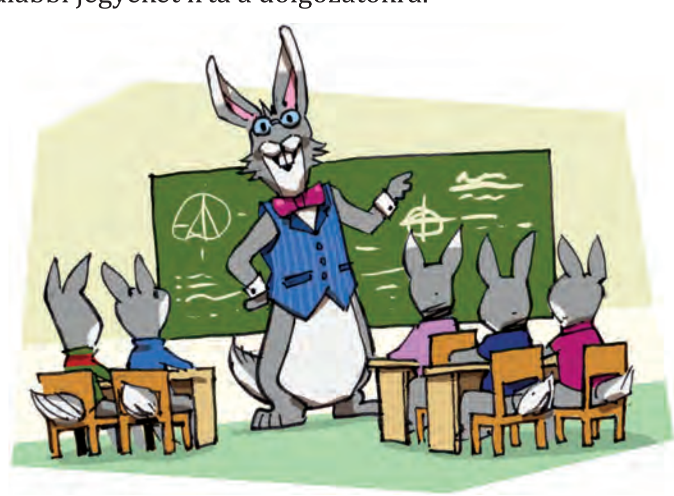
Tapsi: $\frac{14}{2} \cdot \frac{10}{14}$

Füli: $\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{3}$

Ugri: $\frac{4}{6} \cdot 4\frac{1}{2}$

Nyafi: $\frac{3}{4} \cdot 5\frac{1}{3}$

Kápi: $2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{5}$



Számold ki, melyik diák hányas érdemjegyet kapott!

3. OSZTÁS TÖRTTEL

Csoportmunka

3 egyforma poharat töltsetek tele kb. ugyanannyi lencsével!

Osszátok szét a lencsét papírtányérokra vagy papírlapokra úgy, hogy minden pohár tartalmának a fele jusson a tányérokra! Hány tányérra vagy papírlapra van szükség?

Ismételjétek meg a feladatot 4 pohár lencsével, és minden tányérra egy pohár tartalmának a harmadrésze jusson. Ügyeljetek arra, hogy az elosztás igazságos legyen!

1. példa

Nagymama almás kiflit készít. Reszelt almából 4 kanálnyi van. Minden kis tésztadarabra $\frac{1}{5}$ kanál alma kell. Hány almás kifli készül ebből a mennyiségből?

Megoldás

Azt kell kiszámolni, hogy 4-ben hányszor van meg az $\frac{1}{5}$, azaz $4 : \frac{1}{5}$ mennyivel egyenlő.

1 kanálból 5 db kifli, 4 kanálból 20 db kifli készíthető. $4 : \frac{1}{5} = 20$

Gondolkodhatunk úgy is, hogy $\frac{1}{5}$-öt mennyivel kell megszoroznunk, hogy 4-et kapjunk.

$\frac{1}{5} \cdot \blacktriangle = 4$, ezt felírhatjuk így is: $\frac{1}{5} \cdot \blacktriangle = \frac{20}{5}$, ezért $\blacktriangle = 20$.

2. példa

Hány gyereknek elég 2 pizza, ha mindenki $\frac{1}{4}$ pizzát kap?

Megoldás

Az ábra alapján 1 pizza 4 gyereknek, 2 pizza 8 gyereknek elegendő.

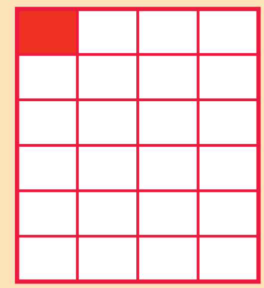
Írjuk fel műveletek segítségével is! $? \cdot \frac{1}{4} = 2$ $\quad 2 : \frac{1}{4} = ?$ $\quad \frac{1}{4}$-et mennyivel kell megszoroznunk, hogy 2-t kapjunk? Ez a szám a 8, mert $8 \cdot \frac{1}{4} = 2$. $\quad 2 : \frac{1}{4} = 2 \cdot 4 = 8$

8 gyereknek jut egy-egy negyed 2 pizzából.

Páros munka

600 : 2 =	A két oszlop közül mindketten válasszatok egyet-egyet! Az oszlopban lévő műveleteket írjátok le a füzetetekbe, és számítsátok ki az eredményt! Hogyan változott a hányados értéke? Beszéljétek meg, mit tapasztaltatok a saját számolásotokban!	600 : 2 =
300 : 2 =		600 : 4 =
200 : 2 =		600 : 6 =
100 : 2 =		600 : 10 =
60 : 2 =		600 : 20 =

3. példa



Az ábrán látható nagy téglalap 1 egész. Felosztottuk függőlegesen 4, vízszintesen 6 egyenlő részre.

a) A nagy téglalap mekkora része van kiszínezve?

b) Hányszor nagyobb az első oszlop területe, mint a színezett téglalap területe?

c) Hányszor nagyobb 1 oszlop területe, mint 3 kis téglalap területe?

d) Hányszor nagyobb 2 oszlop területe, mint 1 kis téglalap területe?

e) Hányszor nagyobb 3 oszlop területe, mint 5 kis téglalap területe?

Megoldás

a) 24 kis téglalapból 1 színes, ezért $\frac{1}{24}$ rész van kiszínezve.

b) A választ az ábráról leolvashatjuk. 6 kis téglalap van az első oszlopban, ezért 6-szor nagyobb az első oszlop területe.

A feladat megoldását törtekkel is felírhatjuk. Az első oszlop területe $\frac{1}{4}$, egy kis téglalap területe $\frac{1}{24}$, és $\frac{1}{4} : \frac{1}{24} = 6$.

c) A válasz megadásához használjuk megint az ábrát. Egy oszlop 2-szer akkora területű, mint 3 kis téglalap.

Más gondolatmenettel: felhasználhatjuk a *b)* rész eredményét és azt, hogy ha az osztót háromszorosára változtatjuk, a hányados harmadára csökken.

$\frac{1}{4} : \frac{3}{24} = 2$

d) A választ az ábráról leolvasva: 12-szer nagyobb két oszlop területe, mint egy kis téglalap területe.

Használjuk fel ismét a *b)* rész eredményét és azt, hogy ha az osztandót kétszeresére változtatjuk, akkor a hányados is kétszeresére nő.

$\frac{2}{4} : \frac{1}{24} = 12$

e) A választ most nem tudjuk leolvasni az ábráról, de használjuk fel az előző részek tapasztalatait.

Az osztandó 3-szorosára, az osztó 5-szörösére változott, ezért az $\frac{1}{4} : \frac{1}{24} = 6$ osztás eredménye háromszorosára nő, és ötödrészére csökken.

$\frac{3}{4} : \frac{5}{24} = 6 \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{5}$

Az eredmény nem egész, ezért sem tudtuk az ábránkról leolvasni.

3 oszlop területe $\frac{18}{5}$-ször nagyobb, mint 5 kis téglalap területe.

3. OSZTÁS TÖRTTEL

Összegezzük eddigi tapasztalatainkat!
Megfigyelhetjük, hogy a törttel való osztást helyettesíthetjük szorzással. Azt kell megállapítanunk, mi lesz a szorzat.

Összegyűjtöttük, milyen osztások szerepeltek a példákban.

Osztás	Szorzás	Tapasztalat
$4 : \frac{1}{5} = 20$	$4 \cdot 5 = 20$	$\frac{1}{5}$ reciproka 5.
$2 : \frac{1}{4} = 8$	$2 \cdot 4 = 8$	$\frac{1}{4}$ reciproka 4.
$\frac{1}{4} : \frac{1}{24} = 6$	$\frac{1}{4} \cdot 24 = 6$	$\frac{1}{24}$ reciproka 24.
$\frac{1}{4} : \frac{3}{24} = 2$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{24}{3} = 2$	$\frac{3}{24}$ reciproka $\frac{24}{3}$.
$\frac{2}{4} : \frac{1}{24} = 12$	$\frac{2}{4} \cdot 24 = 12$	$\frac{1}{24}$ reciproka 24.
$\frac{3}{4} : \frac{5}{24} = \frac{18}{5}$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{24}{5} = \frac{3 \cdot 24}{4 \cdot 5} = \frac{18}{5}$	$\frac{5}{24}$ reciproka $\frac{24}{5}$.

A tapasztalataink alapján az alábbi szabályt fogalmazhatjuk meg:

Közönséges törttel úgy osztunk, hogy az osztandót az osztó reciprokával szorozzuk.

Fontos! Az osztandó és az osztó nem felcserélhető, ezért figyelj arra, hogy mindig az osztó reciprokával szorozz!

Feladatok

1. Végezd el a következő osztásokat!

a) $\frac{9}{5} : 3$ *b)* $\frac{36}{7} : 100$ *c)* $\frac{18}{7} : 4$ *d)* $\frac{24}{5} : 12$ *e)* $\frac{45}{8} : 18$

2. Válaszolj az alábbi kérdésekre!

a) $\frac{50}{9}$ milliméter hány centiméter, deciméter és méter?

b) $7\frac{1}{7}$ milliméter hány centiméter, deciméter és méter?

c) $\frac{250}{3}$ milliliter hány centiliter, deciliter és liter?

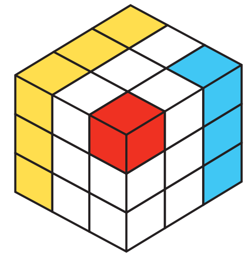
d) $\frac{1250}{2}$ gramm hány dekagramm és kilogramm?

3. Gondolj egy számra! – mondta Rázsi, a nagy varázsló. Ha megmondod, mennyivel kell megszorozni, hogy 1-et kapjunk, kitalálom, mire gondoltál.
– Én sosem kapok 1-et, bármivel szorzom meg – panaszkodott Jakab.
– Sebaj! – válaszolta a varázsló, és így is kitalálta, mire gondolt a fiú.

a) Mi volt a varázsló trükkje?

b) Mire gondolt Jakab?

4. Egy piros, három kék, kilenc sárga és tizennégy fehér kis kockából $3 \times 3 \times 3$-as nagy kockát építettünk. Válaszd ki, hogy az *A), B), C), D)* számítások melyik állításhoz tartoznak! Amelyik számításhoz nem tartozik állítás, ahhoz írj egyet!



a) Ennyiszer nagyobb a kék kockák térfogata, mint a piros kocka térfogata.
b) Ennyiszer nagyobb a sárga kockák térfogata, mint a kék kockák térfogata.
c) Ennyiszer nagyobb két kék oszlop térfogata, mint a piros kocka térfogata.

A) $\frac{9}{27} : \frac{3}{27} = 3$ *B)* $\left(2 \cdot \frac{9}{27}\right) : \left(3 \cdot \frac{3}{27}\right) = 2$ *C)* $\frac{3}{27} : \frac{1}{27} = 3$ *D)* $\left(2 \cdot \frac{3}{27}\right) : \frac{1}{27} = 6$

5. Mennyivel kell megszorozni a $\frac{4}{5}$-öt, hogy az eredmény

a) (-1) *b)* 2 *c)* (-3) *d)* $\frac{8}{9}$ *e)* $\left(-\frac{5}{7}\right)$ *f)* $3\frac{2}{7}$ legyen?

6. Végezd el a következő osztásokat! Ha lehet, egyszerűsíts!

a) $\frac{1}{9} : \frac{1}{3}$ *b)* $\frac{8}{9} : \frac{5}{6}$ *c)* $\frac{2}{3} : \frac{2}{3}$ *d)* $\frac{7}{13} : \frac{28}{11}$

e) $\frac{7}{10} : 1\frac{1}{8}$ *f)* $1\frac{2}{25} : 1\frac{4}{5}$ *g)* $5 : 4\frac{1}{6}$ *h)* $8 : 2\frac{4}{7}$

7.

a) A téglalap egyik oldala $\frac{4}{3}$ deciméter. Mekkora a másik oldala, ha a területe 2 dm^2?

b) A téglalap egyik oldala $\frac{5}{4}$ deciméter. Mekkora a másik oldala, ha a területe $\frac{15}{8}$ dm^2?

8. Az énekkaros lányok hajába egyforma hosszú szalagot szeretnének kötni az iskolai műsoron. Egy szalag hossza $\frac{5}{7}$ méter. Hány szalag készülhet 10 méter anyagból?

9. Míg az óriáspapa $\frac{9}{5}$, a fia $\frac{3}{4}$ mérföldet lép. 15 óriáspapa-lépést hány lépéssel tesz meg a fia?

10. A legjobb szegedi szakácsmesterek készítették el a világ eddigi legnagyobb adag gulyáslevesét. A hatalmas bográcsban 1700 liter gulyás készült. Hány gyerek lakhatna jól ennyi levesből, ha fejenként $\frac{2}{5}$ liter gulyást kapnának?

4. MIT TANULTUNK A TIZEDES TÖRTEKRŐL? ISMÉTLÉS

Játék

Alakítsatok 6 fős csoportokat!
Mindenki készítsen a füzetébe az alábbihoz hasonló ábrát!

_ _ _ , _ _ _

Tegyetek egy dobozba 1-től 9-ig számkártyákat úgy, hogy a számok ne látszódjanak!

A csoport egyik tagja húzzon egy kártyát, és a húzott számot mutassa meg a többieknek is! Mindenki írja be a számot valamelyik helyi értékre! A kártyát tegyétek vissza, a következő csoporttag is húzzon egyszer, és innentől az előzőek szerint folytatódjék a játék!

Miután mindenki húzott és megalkotta a fentiek alapján a tizedes törtet, hasonlítsátok össze a számaitokat!

Akié a legnagyobb, az nyert!

A törteket többféle alakban írhatjuk fel. A tört bővítésekor tetszőlegesen sok, az adott törttel egyenlő közönséges tört alakot képezhetünk.

Ha a számlálót elosztjuk a nevezővel, akkor a tört tizedes tört alakját kapjuk. A tizedes tört alak a számok helyiértékes írásmódját követi.

Például a $\frac{3}{8}$ tört tizedes tört alakját megkapjuk, ha a 3-at elosztjuk a 8-cal, 3 : 8 = 0,375.

A tizedesvessző elválasztja az egészrészt és a törtrészt. A tizedesvessző után a tized, a század, az ezred… helyi értékek következnek.
A tizedesvessző után az utolsónak felírt számjegy mögé tetszőleges számú 0-t írhatunk, a szám értéke nem változik. Ez a tizedes tört bővítése.

A vegyes törteket úgy a legegyszerűbb átírni tizedes tört alakba, hogy a törtrésznél elvégezzük az osztást, majd az egészrészhez hozzáadjuk a kapott tizedes törtet.
Például a $47\frac{6}{25}$ tizedes tört alakja:

$\frac{6}{25} = 6 : 25 = 0{,}24$ $\qquad$ $47\frac{6}{25} = 47 + 0{,}24 = 47{,}24$

Egy közönséges tört tizedes tört alakja lehet:

– véges, ha az osztás során valahol 0 maradékot kapunk.

Például a $\frac{34}{85}$ tizedes tört alakja $\frac{34}{85} = 0{,}4$

```
34 : 85 = 0,4
340
  00
```

– vagy végtelen szakaszos, ha az osztás során soha nem kapunk 0 maradékot.

Az osztási maradékok ismétlődnek, ezért a hányados számjegyei is ismétlődni fognak. Az ismétlődést a számjegyek fölé írt ponttal jelezzük.

Például a $\frac{25}{33}$ tizedes tört alakja $\frac{25}{33} = 0{,}\dot{7}\dot{5}$

```
25 : 33 = 0,7575...
250
  190
    250
      190
        ...
```

Tizedes törteket úgy adunk össze vagy úgy vonunk ki, hogy a számjegyeket helyi érték szerint egymás alá írjuk, és a legkisebb helyi értéktől indulva követjük az összeadás vagy a kivonás lépéseit. Amikor az összeadás vagy a kivonás során elérünk a tizedesvesszőhöz, akkor kiteszszük azt az összegben vagy a különbségben is.

Például: 345,11 + 689,125 = 1034,235

```
  345,11
+ 689,125
 1034,235
```

1. példa

Dani és Peti kinőtték a télikabátjukat, ezért a tél elején mindkettőjüknek vásárolni kellett egy-egy új kabátot. A szüleikkel együtt kerestek megfelelőt az interneten. Danié 84,79 euróba, Petié 74,49 euróba került.

a) Hány eurót kell fizetni összesen a két kabátért?

b) Néhány nappal a megrendelés után látták, hogy a Daninak vett kabát árát 9,45 euróval csökkentették. Mennyibe került Dani kabátja a leárazás után?

Megoldás

a) A két fiú kabátja együttesen 159,28 euróba került.

```
  84,79
+ 74,49
 159,28
```

b) Dani kabátjának új ára 75,34 euró.

```
  84,79
-  9,45
  75,34
```

2. példa

A Mohos-tőzeglápba terveznek egy új látogatási útvonalat. A kirándulók 32 fapallóból álló hídon mehetnének be az érdekes területre. Milyen hosszú a híd, ha egy fapalló 2,34 méter?
Tervezik, hogy a palló melletti táblára kiírják az útvonal hosszát méter-pontossággal. Te mit írnál rá?

Megoldás

Szorozzuk meg a 2,34-ot 32-vel!
A híd hossza 74,88 méter.
A táblára ezt írnánk: 75 m.

$$\begin{array}{rr} 2{,}34 \cdot 32 & \\ 702 & \\ +\ 468 & \\ \hline 74{,}88 & \end{array}$$

Tizedes törtet egész számmal úgy szorzunk, mintha egész szám lenne, majd a szorzatban annyi tizedesjegyet jelölünk ki, amennyi a tizedes törtben szerepelt.

3. példa

Vettünk egy kürtőskalácsot, és egyenlő részekre akartuk osztani a család 5 tagja között. Lilla azt javasolta, hogy tekerjük le, és számoljuk ki, milyen hosszú rész jut egy-egy embernek. A letekert kalács 1,8 méter hosszú csík lett. Milyen hosszú csíkot kapott Lilla?

Megoldás

$$\begin{array}{l} 1{,}8 : 5 = 0{,}36 \\ 1\,8 \\ \,3\,0 \end{array}$$

Tehát Lillának 0,36 m, azaz 36 cm hosszú kürtőskalácscsík jutott.

Tizedes törtet nullától különböző egész számmal úgy osztunk, mintha az osztandó is egész szám volna. Amikor a tizedesvesszőhöz érünk, akkor a hányadosban is kitesszük a tizedesvesszőt.

Feladatok

1. Alakítsd át közönséges törtté a felsorolt tizedes törteket! Ha lehet, egyszerűsíts! Használhatsz vegyesszám-alakot is!

a) 1,2 *b)* 13,25 *c)* –5,6 *d)* –3,5 *e)* 0,123
f) 2,775 *g)* –100,1 *h)* 7,02 *i)* 3,17 *j)* 9,99

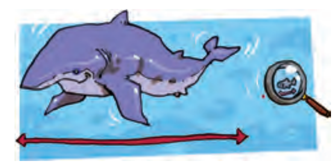
2. Írd át az alábbi törteket tizedes tört alakba!

a) $\frac{3}{10}$ *b)* $\frac{57}{100}$ *c)* $\frac{3}{2}$ *d)* $-\frac{7}{25}$ *e)* $3\frac{4}{5}$ *f)* $-1\frac{3}{4}$ *g)* $\frac{1}{3}$ *h)* $-\frac{7}{9}$

3. A törtátíró verseny második fordulójába csak az juthatott, aki az öt tört közül legalább négyet helyesen írt át két tizedesjegyre kerekített tört alakba. Ellenőrizd Gerzson számításait! Bekerült a második fordulóba?

a) $\frac{256}{29} \approx 8{,}83$ *b)* $\frac{56}{89} \approx 0{,}63$ *c)* $\frac{35}{21} \approx 1{,}67$ *d)* $\frac{40}{13} \approx 3{,}15$ *e)* $\frac{125}{300} \approx 0{,}42$

4. Állítsd hosszúságuk szerint növekvő sorrendbe a szövegben szereplő halakat!



A világ legnagyobb hala a cetcápa. A leghosszabb kifogott példánya 12,65 méter hosszú volt. Ehhez képest kicsinek mondható az úgynevezett emberevő fehércápa, melyből a leghosszabb kifogott példány csupán 6,4 méteres volt. A legkisebb hal a törpegéb, legnagyobb kifejlődött példánya 0,0099 m. A világ legkisebb étkezési hala a babszemhal, hosszúsága 0,024 méter. A leggyorsabb hal a fekete nyársorrú hal, hosszúsága azonban átlagosan 7 méterrel rövidebb a cetcápáénál. Hazánk leggyorsabb hala a szivárványos pisztráng, csupán 0,7 méter hosszúságú. A világ legdrágább hala a kékuszonyú tonhal, melyből 4,58 méterest is fogtak már. 2013-ban rekordösszeget, 380 millió forintot fizettek ki egy 222 kg-os példányért.

5.

a) Adj meg a sakktábláról három különböző mezőt úgy, hogy a rajtuk álló álló tizedes törtek összege 1; 2; 5; 9,35 legyen!

b) Adj meg a sakktábláról két különböző mezőt úgy, hogy a rajtuk álló számok különbsége 1; −2; −5; 3,75 legyen!

4	**1,4**	**4,8**	**0,2**	**4,1**
3	**5,25**	**2,1**	**0,5**	**4,15**
2	**0,1**	**0,35**	**0,45**	**0,25**
1	**3,8**	**3,9**	**6,15**	**0,7**
	A	B	C	D

6. Mi a betűkódja az előző feladat sakktábláján szereplő számok közül annak a számnak, melyet ha

a) megszorzunk 3-mal, akkor 1,05-ot kapunk?

b) megszorzunk (− 4)-gyel, akkor (−21)-et kapunk?

c) elosztunk 2-vel, akkor 2,075-et kapunk?

d) elosztunk (− 5)-tel, akkor (−0,96)-ot kapunk?

7. A tizenkettedikes Vilmos lelkesen felajánlotta testvéreinek, hogy hazacipeli az ő tankönyveiket is az év eleji tankönyvátvételről. Hány kg-ot nyomtak Vilmos könyvei, ha összesen 28 kg-ot vitt haza, amiből az ötödikes Regő összes könyve 6,3 kg, a hetedikes Sárié 10,4 kg és a tizedikes Rékáé 7,85 kg tömegű volt?

8. A Jeges család gyerekeinek egyik nagypapája, akit Fagyipapinak is neveznek, arról kapta a becenevét, hogy állandóan tele van a mélyhűtője fagyival. A múlt héten vett 6 doboz közül háromban dobozonként 8 db 6,7 dkg tömegű tölcséres fagyi, míg a másik háromban dobozonként 6 db 7,6 dkg-os jégkrém volt. Hány kg jeges édességet vett Fagyipapi?

9. Nagymama 4,2 liter madártejet főzött, majd gondosan ügyelve rá, hogy mindenki ugyanannyit kapjon, szétosztotta 12 unokája között. Hány dl madártejet kaptak az unokák fejenként?

5. SZORZÁS TIZEDES TÖRTTEL

PÁROS MUNKA

A páros egyik tagja a bal oldali számot szorozza meg 10-zel, 100-zal, 1000-rel. A páros másik tagja a jobb oldali számot ossza el 10-zel, 100-zal, 1000-rel!

Dolgozzatok a füzetetekben!

25,48 123,5

Mondjátok el egymásnak, mit tapasztaltatok! Hogyan változott a tizedesvessző helye a szorzatban, illetve a hányadosban?

1. példa

Végezzük el az alábbi szorzásokat! Fogalmazzuk meg a tapasztalatainkat!

a) $25{,}4 \cdot 20$ *b)* $25{,}4 \cdot 2$ *c)* $25{,}4 \cdot 0{,}2$ *d)* $25{,}4 \cdot 0{,}02$

Megoldás

a) $25{,}4 \cdot 20 = 508$, mert

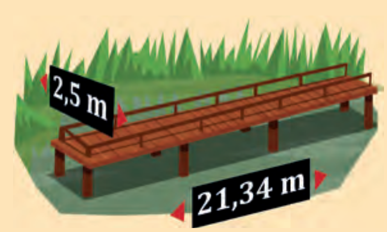
$$\begin{array}{l} \underline{25{,}4 \cdot 20} \\ 508{,}0 \end{array}$$

A többi szorzat kiszámításánál felhasználjuk, hogy az egyik tényező tizedrészére változott, így a szorzat is tizedrészére változik.

b) $25{,}4 \cdot 2 = 50{,}8$ *c)* $25{,}4 \cdot 0{,}2 = 5{,}08$ *d)* $25{,}4 \cdot 0{,}02 = 0{,}508$

2. példa

A Mohos-tőzeglápba egy cölöpökre állított téglalap alakú látogatói teraszt is terveznek, amelynek hossza 21,34 méter, szélessége 2,5 méter. Mekkora a terasz területe?



Megoldás

Írjuk át a tizedes törteket közönséges törtekké:

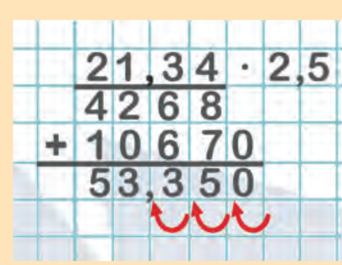
$21{,}34 \cdot 2{,}5 = \frac{2134}{100} \cdot \frac{25}{10}$.

Végezzük el a közönséges törtek szorzását: $\frac{2134}{100} \cdot \frac{25}{10} = \frac{53\,350}{1000}$.

Alkalmazzuk az 1000-rel való osztásnál tanultakat, és léptessük a számlálóban a tizedesvesszőt hárommal balra:

$\frac{53\,350}{1000} = 53\,350 : 1000 = 53{,}350.$

Vagyis a terasz területe: $53{,}35\ m^2$.



A tizedes törtek szorzásának szabálya:

Két tizedes törtet úgy szorzunk össze, mintha egész számok lennének, majd a szorzatban annyi tizedesjegyet jelölünk, amennyi a két tényezőben összesen volt.

Feladatok

1. Végezd el a szorzásokat! Ebben a feladatban kiteheted a tizedesvesszőt akkor is, ha nem lenne rá szükség!

a) 12 · 100 *b)* 120 · 10 *c)* 1,2 · 1000 *d)* 0,12 · 10 000 *e)* 0,0012 · 1 000 000
f) 1,25 · 100 *g)* 1,25 · 1000 *h)* 15,625 · 100 *i)* 15,625 · 1000 *j)* 15,625 · 10 000

2. *a)* 0,23 milliméter vastag papírlapból egymásra teszünk 5-öt, 10-et, 23-at, 79-et, 100-at, illetve 348-at. Milyen vastag papírkötegeket kapunk?
b) Milyen vastag a pénztárszalag, ha a papír vastagsága 0,34 milliméter és 14, 50, 89, 120, 345 menetet tartalmaz?

3. *a)* Milyen vastag a 0,125 méter vastag fal deciméterben, centiméterben, illetve milliméterben?
b) Egy süteménybe 0,078 kg liszt szükséges. Mennyi liszt kell 6, 12, 35, 43 darab sütemény elkészítéséhez?
c) A kémialaboratóriumban 2,27 milliliterenként öntik le a kiválasztott elixírt egy lombikba. 27 öntés után mennyi elixír lesz a lombikban összesen?

4. Végezd el a szorzásokat!

a) 0,6 · 1,2 *b)* 7,25 · 4,2 *c)* –7,6 · 0,3 *d)* 4,3 · 5,3 *e)* 0,12 · (–0,95)
f) 5,71 · 7,2 *g)* 0,317 · (–1,25) *h)* 2,34 · 35,5 *i)* (–12,5) · (–3,98) *j)* 0,0123 · 502,7

5. Milyen számok kerüljenek a □ helyére, hogy igazak legyenek az alábbi egyenlőségek?

a) □ : 3,7 = 12,8 *b)* □ : 0,16 = (–2,7) *c)* □ : 1,01 = 5,3
d) □ : (–3,05) = 1,56 *e)* □ : 0,12 = 0,34 *f)* □ : (–0,27) = (–13,4)

6. *a)* Hányszor kell megszorozni 1000-et 0,1-del, hogy 1-et kapjunk?
b) Hányszor kell megszorozni 32-t 0,5-del, hogy 1-et kapjunk?
c) Hányszor kell megszorozni 625-öt 0,2-del, hogy 1-et kapjunk?

7. *a)* A füvesítés négyzetméterenként 500 forintba kerül. Mennyibe kerül 200,65 négyzetméter terület füvesítése?
b) Egy zsömle tömege 0,03 kg. Hány kilogramm 145 zsömle?
c) 1 liter üzemanyag 401,9 forintba kerül. Mennyibe kerül 23,56 liter üzemanyag?

8. Az ízletes kakaóital készítésénél 1 deciliter tejhez 1,5 teáskanál kakaóport ajánlott keverni. Mennyi kakaópor szükséges 2,6 deciliter tejhez?

9. Hány négyzetméter területű a téglalap alakú szőnyeg, ha oldalai 1,85 méter és 2,6 méter hosszúak?

10. Egy angol gallon 4,55 liter. Egy liter benzin ára 1,14 angol font. Mennyibe kerül egy gallon benzin Nagy-Britanniában?

6. OSZTÁS TIZEDES TÖRTTEL

PÁROS MUNKA

Versenyezzetek!

Döntsétek el az alábbi állításokról, hogy igazak vagy hamisak! A füzetetekbe írjátok a választ!
A válaszok eldöntésében segíthet, ha egy-egy példát kiszámoltok.

A) Ha egy osztásban az osztandót elosztjuk 10-zel, a hányados a tizedrészére változik.
B) Ha egy osztásban az osztót elosztjuk 10-zel, a hányados a tizedrészére változik.
C) Ha egy egész szám utolsó számjegye után nullákat írunk, akkor a szám értéke nem változik.
D) Ha egy tizedes tört véges, és az utolsó számjegy után nullákat írunk, a tizedes tört értéke nem változik.
E) Ha egy osztásnál az osztandót és az osztót ugyanazzal a nullától különböző számmal megszorozzuk, a hányados értéke nem változik.

Aki több helyes döntést hozott, az nyeri meg a versenyt.

1. példa

Osztálydekorálás alkalmával Zsombi A4-es papírlapból 3,3 cm széles és 21 cm hosszú csíkokat vág le. Az A4-es méretű lap hosszabb oldala 29,7 cm hosszú, a rövidebb pedig 21 cm. Egy papírból maximum hány csíkot vághat le?

Megoldás

A 29,7-et el kell osztani 3,3-del.

Ha az osztandót és az osztót is 10-zel bővítjük, akkor a hányados értéke nem változik.

29,7 : 3,3 = 297 : 33

297 : 33 = 9 Zsombi maximum 9 csíkra vágta a papírlapot.
  0

2. példa

A szárított almachips nagyon finom és egészséges. 1 kg almából 0,14 kg szárított almachips lesz.
Hány kg alma felhasználásával lehet 6,3 kg szárított almachipset készíteni?

Megoldás

A 6,3 : 0,14 osztás eredményét keressük.
Az osztóban két tizedesjegy szerepel, ezért szorozzuk meg mindkét számot 100-zal. A hányados értéke nem változik, és az osztó egész szám lesz. Ezt az osztást már el tudjuk végezni.

6,3 : 0,14 = 630 : 14 = 45

45 kg almából lesz 6,3 kg szárított almachips.

Tizedes törtet tizedes törttel úgy osztunk, hogy az osztandót és az osztót megszorozzuk 10-zel, 100-zal, ... úgy, hogy az osztó egész szám legyen, majd ezekkel a számokkal végezzük el az osztást.

Feladatok

1. Az alábbi hányadosok közül az egyik értéke különbözik a többitől. Keresd a kakukktojást! Válaszodat számolással igazold!

a)	58,2 : 100	0,582 : 1	5,82 : 10	582 : 1000	5,82 : 100
b)	5,1 : 3,4	51 : 34	0,51 : 0,34	51 : 0,34	10,2 : 6,8
c)	84,36 : 7,6	8,436 : 76	843,6 : 76	0,8436 : 0,076	8436 : 760

2. *a)* Milyen nehéz egy kisautó, ha 5 darab 6,5 dekagramm?
b) Milyen nehéz egy borsószem, ha 13 darab 17,55 gramm?

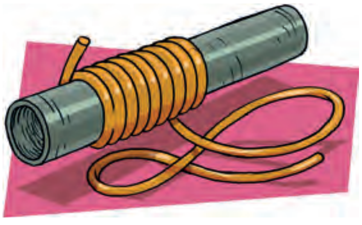
3. *a)* Hány darab ceruzát állítottak sorba a gyerekek, ha 6,237 méter hosszú sort kaptak, és egy ceruza 0,231 méter?
b) Hány szem meggy lehet az 54,18 dekagramm tömegű zacskóban, ha egy szem tömege 0,43 dekagramm?
c) A gyár kapujában lévő mérleg a ráálló autók tömegét tonnában méri meg. A gyárba érkező üres teherautó tömege 1,923 tonna. Az alkatrésszel megrakott, távozó teherautó tömege 3,467 tonna. Hány darab alkatrész volt rajta, ha egy darab tömege 0,193 tonna?

4. Állítsd növekvő sorrendbe a következő hányadosokat!
A) 70,564 : 5,2 *B)* 140,286 : 10,3 *C)* 32,472 : 2,4 *D)* 6,8799 : 0,51

5. *a)* A Velencei-tó körüli kerékpárút 30,75 kilométer. Mennyi idő alatt kerüli meg a tavat az a kerékpáros, aki óránként 12,5 kilométert tesz meg?
b) A téglalap alakú telek területe 494,78 m^2, szélessége 14,3 méter. Milyen hosszú a telek?
c) Az „Öleld meg a Dunát” akció a környezetvédelemről szólt. Az emberek élőláncot alkottak a Szabadság híd (334 m) és az Erzsébet híd (379 m) között. Hány ember alkotta a láncot, ha a két híd távolsága 1,4 km, és egy ember 1,6 m-t jelent? (A Duna mindkét partján kialakult lánc.)

6. A téglalap alakú utat kockakövekkel borították. Egy kockakő éle 6,8 cm.
a) Hány kockakő szélességű a 7,208 méter széles út?
b) Hány kockakő hosszúságú az 51,408 méter hosszúságú út?
c) Összesen hány kockakövet raktak le?

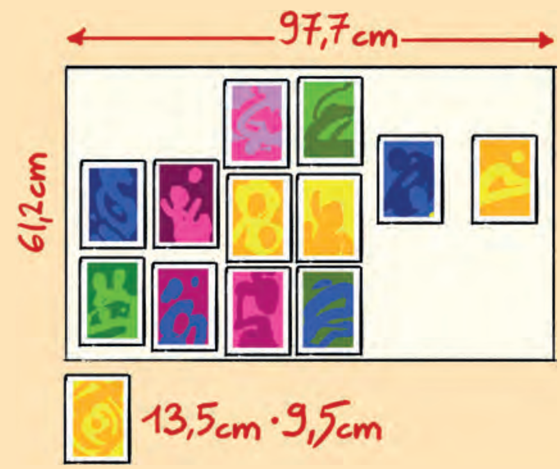
7. A díszkorláton a rézhuzalt szorosan egymás mellé tekercselték. A rézdrót 1,16 milliméter átmérőjű. A tekercselt rész 29 centiméter hosszú. Körülbelül hány menetes a tekercs?



7. ÖSSZETETT MŰVELETEK, ZÁRÓJELFELBONTÁS

1. példa

A 6. a osztály tablót készített a nyári tábori napokról. A tabló egy olyan kartonlapra készült, amelynek hosszabb oldala 97,7 cm, rövidebb oldala 61,2 cm. Mekkora rész maradt üresen a tablón, ha 12 db fényképet ragasztottak fel úgy, hogy a fényképek nem takarják egymást? Egy fénykép mérete 13,5 cm × 9,5 cm.



Megoldás

A szabadon maradt területet megkapjuk, ha a kartonlap területéből kivonjuk a 12 db fénykép területét:
97,7 · 61,2 – 12 · (13,5 · 9,5).

A műveletsorban először a szorzásokat, majd a kivonást végezzük el.
97,7 · 61,2 = 5979,24
13,5 · 9,5 = 128,25
12 · 13,5 · 9,5 = 1539

A szabadon maradt terület: 5979,24 – 1539 = 4440,24 cm^2.

2. példa

a) Számítsuk ki az alábbi műveletsor eredményét!
217,75 – 42,5 · 7,4 + 192,4

b) A fenti műveletsorban hányféleképpen tehetünk ki egy zárójelpárt?
Végezzük el a műveleteket a zárójeles műveletsorokban!

Megoldás

a) 217,75 – 42,5 · 7,4 + 192,4 = 217,75 – 314,5 + 192,4 = 95,65

b) Ha a nyitó zárójelet az első szám elé tesszük, akkor a záró része kerülhet a második, a harmadik és a negyedik szám után. Ez 3 eset.
(217,75 – 42,5) · 7,4 + 192,4 = 175,25 · 7,4 + 192,4 = 1296,85 + 192,4 = 1489,25
(217,75 – 42,5 · 7,4) + 192,4 = (217,75 – 314,5) + 192,4 = – 96,75 + 192,4 = 95,65
(217,75 – 42,5 · 7,4 + 192,4) = (217,75 – 314,5 + 192,4) = 95,65
Ha a zárójel nyitó részét a második szám elé tesszük, akkor a zárójel másik felét már csak két helyre lehet tenni. Ez 2 eset.
217,75 – (42,5 · 7,4) + 192,4 = 217,75 – 314,5 + 192,4 = 95,65
217,75 – (42,5 · 7,4 + 192,4) = 217,75 – (314,5 + 192,4) = 217,75 – 506,9 = –289,15
Ha a zárójel nyitó részét a harmadik szám elé tesszük, akkor már csak egy helyre kerülhet a zárójel másik fele. Ez 1 eset.
217,75 – 42,5 · (7,4 + 192,4) = 217,75 – 42,5 · 199,8 = 217,75 – 8491,5 = –8273,75
Az utolsó szám elé nincs értelme zárójelet tenni.
Ez összesen 6 eset.

Több műveletet tartalmazó műveletsor eredményét az alábbi szabályok szerint számoljuk ki.

1. **Ha a műveletsorban nincsenek zárójelek, akkor balról jobbra haladva először a szorzást és az osztást, majd az összeadást és a kivonást végezzük el.**
2. **Ha a műveletsorban van zárójel, akkor először a zárójelben lévő műveleteket kell elvégezni.**

Feladatok

1. Végezd el – ha tudod, fejben – az alábbi műveleteket!

a) $8{,}1 : 0{,}9 + 1{,}1 \cdot 10$
b) $0{,}125 \cdot 8 + 3{,}6 : 0{,}9$
c) $2{,}5 : 0{,}5 + 0{,}35 : 0{,}07$
d) $0{,}15 \cdot 50 \cdot 2 - 0{,}48 : 0{,}06$
e) $0{,}24 : 0{,}08 - 0{,}25 \cdot 4$
f) $5{,}6 : 0{,}7 - 2 : 0{,}5$

2. Keresd az egyenlőket!

a) $2{,}8 \cdot 1{,}6 + 2{,}8 \cdot 3{,}9$
b) $18{,}48 \cdot 0{,}82$
c) $31{,}07 \cdot 20{,}5$
d) $0{,}817 \cdot 18{,}48 + 0{,}003 \cdot 18{,}48$
e) $31{,}07 \cdot 23{,}9 - 31{,}07 \cdot 3{,}4$
f) $5{,}5 \cdot 2{,}8$

3. Döntsd el, hogy törtekkel vagy tizedes törtekkel számolnál szívesebben! Váltsd át azokat a számokat, amelyek nem az általad választott tört alakban vannak, és végezd el a műveleteket!

a) $14{,}56 \cdot \frac{1}{2}$ *b)* $8{,}5 : \frac{1}{3}$ *c)* $\frac{9}{7} : 1{,}5$ *d)* $29{,}4 + \frac{2}{5} \cdot \frac{30}{12}$ *e)* $\frac{4}{5} \cdot 0{,}2 : 0{,}16$

4. Végezd el a műveleteket!

a) $3{,}27 + \frac{6}{5} \cdot 5{,}9 - 4{,}2 : 3$
b) $6{,}46 : \frac{17}{10} + 19{,}1 \cdot \frac{2}{5}$
c) $31{,}05 \cdot 1{,}8 + 24{,}8 : 0{,}4 \cdot 0{,}1$
d) $118{,}07 - (59{,}31 + \frac{21}{50} : 0{,}7)$
e) $1{,}08 : 0{,}9 - 0{,}54 : (-0{,}06) \cdot 2\frac{3}{10}$
f) $6{,}3 : 0{,}07 \cdot 2\frac{1}{2} - (46{,}9 \cdot 1{,}2 - 57{,}6 : 0{,}9)$

5.

a) Két szám összege 10,56. Az egyik szám kétszerese a másiknak. Mennyi a kisebb szám?
b) Két szám különbsége 39,32. Az egyik szám ötszöröse a másiknak. Mennyi a nagyobb szám?
c) Két szám összege 13,6, különbségük 5,26. Melyik ez a két szám?

6. Gáspár hatalmas súlyzókészletet kapott a születésnapjára. A csomag igen nehéz volt, hiszen volt benne 1 súlyzórúd (10 kg), 2 fém szorítógyűrű (0,25 kg/db), 2 db kis súlyzótárcsa (1,25 kg/db), 2 db közepes súlyzótárcsa (2,5 kg/db) és 4 db nagy súlyzótárcsa (5 kg/db). Milyen nehéz volt a csomag?

7. A legremekebb remetecsemete-csemege az egresleves. 1,8 kg egresből 1 liter leves készül, melyből egy csemete négyszer tölti tele kedvenc tálkáját. 3,5 liter leveshez mennyi egres szükséges, és hány teli tálka leves lesz belőle?

8. A jótékonysági váltófutásra az osztályból mind a 32 gyerek benevezett. A 14 lány fejenként 2,4 km-t, míg a fiúk összesen 72 km-t futottak.

a) Mekkora volt a teljes táv hossza?
b) Hány km-t tettek volna meg fejenként, ha mindannyian ugyanakkora távot futnak?

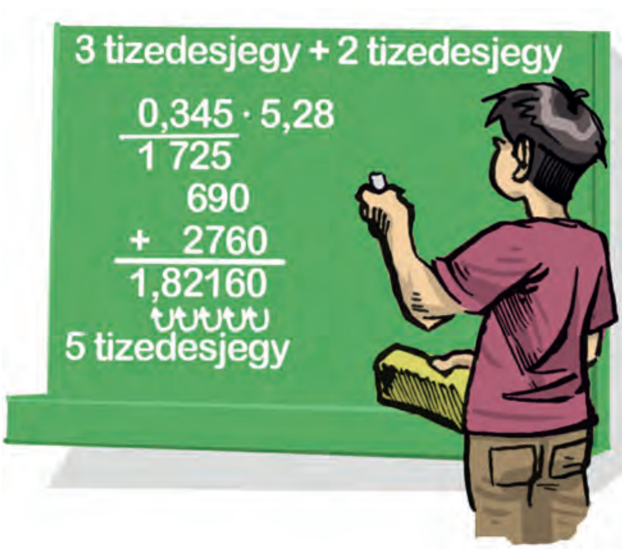
8. ÖSSZEFOGLALÁS

Egy tört törttel való szorzásánál a szorzat számlálója a számlálók szorzata lesz, a nevezője pedig a nevezők szorzata.

Például:

$$\frac{32}{15}\cdot\frac{25}{8}=\frac{32\cdot 25}{15\cdot 8}=\frac{800}{120}=\frac{80}{12}=\frac{20}{3}$$

Egy (nem nulla) szám reciproka az a szám, amelyikkel az eredeti számot megszorozva 1-et kapunk.
Egy közönséges tört esetén a reciprok képzésénél a tört számlálója és nevezője helyet cserél.



Törtet törttel úgy osztunk, hogy az osztó reciprokával szorozzuk az osztandót.

Például:

$$\frac{4}{9}:\frac{10}{21}=\frac{4}{9}\cdot\frac{21}{10}=\frac{14}{15}$$

A tizedes törtekkel úgy szorzunk, mintha egész számok lennének, és a szorzat végére képzelt tizedesvesszőt annyival balra léptetjük, amennyi tizedesjegy a két tényezőben összesen van.

Tizedes törttel úgy osztunk, hogy az osztandóban és az osztóban a tizedesvesszőt annyi helyi értékkel eltoljuk (a számokat 10-zel, 100-zal szorozzuk), amíg az osztó egész szám lesz.

Feladatok

1. Végezd el a következő szorzásokat!

a) $0{,}15\cdot 15$ *b)* $2{,}5\cdot 0{,}35$ *c)* $(-3{,}5)\cdot 0{,}035$ *d)* $0{,}05\cdot 3{,}5$ *e)* $(-0{,}15)\cdot(-0{,}25)$

f) $\frac{3}{7}\cdot\frac{14}{9}$ *g)* $\frac{2}{5}\cdot 1\frac{3}{4}$ *h)* $\left(-\frac{8}{3}\right)\cdot 2\frac{1}{4}$ *i)* $\frac{3}{14}\cdot\frac{20}{15}\cdot\frac{21}{6}$ *j)* $\left(-\frac{9}{6}\right)\cdot\left(-\frac{8}{7}\right)\cdot\frac{7}{8}\cdot\left(-\frac{6}{9}\right)$

2. Végezd el az osztásokat!

a) $2{,}25:1{,}5$ *b)* $1{,}69:1{,}3$ *c)* $2{,}7:(-0{,}12)$ *d)* $(-33{,}015):1{,}55$ *e)* $123{,}76:1{,}3$

f) $\frac{2}{5}:\frac{4}{3}$ *g)* $3\frac{1}{2}:\left(-\frac{7}{10}\right)$ *h)* $2\frac{1}{5}:1\frac{7}{15}$ *i)* $\left(-1\frac{5}{6}\right):\left(-2\frac{4}{9}\right)$ *j)* $\frac{8}{13}:\frac{24}{18}:\frac{6}{26}$

3. Melyik szám a legnagyobb?

a) $\frac{3}{11}\cdot\frac{8}{5}$ $\frac{7}{5}:\frac{11}{3}$ $1\frac{2}{5}:3\frac{2}{3}$

b) $0{,}12:0{,}025$ $3{,}84\cdot 1{,}25$ $1{,}4\cdot 3{,}5$

4. 2014-ben hatalmas legót tornyot építettek a Szent István-bazilika előtt. A torony több mint 450 000 darabból állt. Ez akkor világrekord lett. Mivel semmilyen ragasztóanyagot nem használtak az építés során, a tornyot másnap le is bontották. Oldd meg az alábbi feladatokat, és azok eredményeit betűjelük szerint sorrendbe téve megkapod, hány méter magas volt ez az építmény!

a) A 7,41 és a 15,7 számok szorzatában ez a számjegy áll a tizedesvessző utáni első helyen.

b) A $\frac{32}{63} \cdot \frac{7}{24}$ szorzatban az egyszerűsítés után ez a szám áll a számlálóban.

c) A 29,87 + 1,028 összeg eredményében ez következik a 0 számjegy után.

d) A $\frac{45}{12} : \frac{18}{28}$ osztás eredményében az egyszerűsítés után ez a szám áll a nevezőben.

e) A 43,896 és a 6,2 számok hányadosában ez a számjegy áll az első helyen.

5. Válaszd ki és tedd igazzá az alábbi állítások közül a hamisakat!

a) Törtet törttel úgy szorzunk, hogy a reciprokával osztunk.

b) Törtet törttel úgy osztunk, hogy a reciprokával szorzunk.

c) Ha tizedes törtet 100-zal osztunk, akkor a tizedesvesszőt két helyi értékkel balra visszük.

d) Két tizedes törtet úgy szorzunk össze, mintha egész számok lennének, majd a szorzatban annyi tizedesjegyet jelölünk, amennyi a nagyobbik számban volt.

e) A nulla reciproka nulla.

f) Két pozitív tört szorzata mindig nagyobb 1-nél.

6.

a) Ha öt tégla egymásra rakva $\frac{329}{7}$ cm, akkor milyen magas egy tégla? Milyen magas hét tégla?

b) Ha $\frac{2}{7}$ kg liszt ára 40 Ft, akkor mennyibe kerül 1 kg liszt? Mennyibe kerül $\frac{8}{5}$ kg liszt?

c) A lakás közös költsége négyzetméterenként 675,4 forint. A lakás 62,75 négyzetméter. Mennyi a lakás közös költsége?

7.

a) 0,72 kilogramm lisztből hány süti készíthető, ha egy sütihez 0,12 kilogramm szükséges? Mennyi liszt kell 24 sütihez?

b) A $2\frac{2}{3}$ deciméter hosszú mákos bejglit 20 ugyanolyan vastag szeletre vágjuk. Milyen vastag egy szelet?

c) Géza egy kört 1,5 perc alatt fut le. Mennyi idő alatt fut Géza két és háromnegyed kört? Hány kört fut le 3,75 perc alatt?

d) Éva az elé táruló 5,25 kilométer hosszú tájat több képpel szeretné megörökíteni. Legalább hány fényképet kell készítenie, ha egy fénykép a tájból 0,75 kilométernyit örökít meg?

e) Egy cső 2,45 méter hosszú. Milyen hosszú a kerti vízvezeték, ha 3 egész és egy fél cső összehegesztésével jut el a vízórától a kerti csapig?

8. A téglalap alakú szőnyeg területe 3,1875 négyzetméter. Az egyik oldala 2,55 méter. Mekkora a szőnyeg másik oldala?

9. A függönykarikák közötti távolság 10,25 cm. Hány függönykarika van, ha a függöny egy 1,435 méter széles ablakot takar?

10. Egy vasúti sínszál 11,2 méter hosszú. Hány sínszál található az 5,1072 kilométer hosszú szakaszon?

11. Végezd el az alábbi műveleteket!

a) 43,97 + (–11,8) · 0,2

b) (86,2 · 24,5 + 88,1) : 2,2

c) (–54,9) : 0,3 – 19,5 · 4,7

d) (332,4 – 251,56 : 1,9) · 47,5

12. A kölyök elefántok belemásznak a vízbe, beleteszik a szájukat, és úgy isznak, mert még nem képesek kontrollálni az ormányuk izmait. Az idősebb elefántok már könnyedén az ormányukba szippantják a vizet, majd az ormány végét a szájukhoz emelik, és belefecskendezik a felszippantott innivalót. Hányszor tudja az ormányát teleszippantani vízzel az az elefánt, aki előtt egy 144 literes teli víztartály van, és 9,6 liter vizet tud egyszerre felszívni?

13. Oldd meg az alábbi feladatokat, hogy még többet megtudj a legkülönösebb magyar világrekordokról!

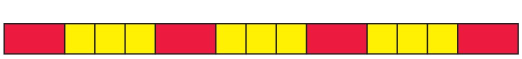
a) Baticz Milán a 24 óra alatt legtöbb Rubik-kockát kirakók világbajnoka. Egy nap alatt (212,5 · 3,2 + 516,5) · 4-szer rakta ki a különféle algoritmusok alapján összekevert Rubik-kockákat.

b) Kenyeres Péter és Kenyeres Tamás hatalmas rendszámtábla-gyűjteménye szintén bekerült a világrekordok közé. Összesen 11 345 különböző rendszámot gyűjtöttek össze, amelyek 10,35 : 0,23 + (23,4 · 0,75 + 62,45) · 1,1 országból származnak.

c) A világ leggyorsabb kezű zongoraművésze Havasi Balázs, aki 2009-ben 60 másodperc alatt (978,5 : 1,03 – 81,2 · 2,5) : 1,5-szer ütötte le a zongorán ugyanazt a billentyűt.

14. A csempéző kisiparos kétféle csempét használ. A piros csempe 25,6 cm, a sárga 12,8 cm hosszú. Milyen hosszú falrészt fednek le a következő minták?

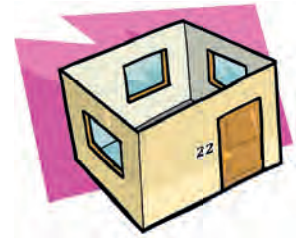
a) ;

b) ;

c) .

15. Pisti szobája 4,2 méter hosszú és 2,30 méter széles. Egy laminált parketta mérete 129,2 cm × 19,2 cm.

a) Hány négyzetméter Pisti szobája?
b) Hány négyzetméter egy laminált parketta?
c) Hány darab parketta kell a szoba lefedéséhez?



16. Hárman indulnak el egyszerre a 48 km-re lévő városba. Gáspár kocsival megy, az ő sebessége 75 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Menyhért vonata 60 km-t tesz meg egy óra alatt. Boldizsár biciklivel megy, ezért ő csak átlagosan 11,25 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad.

a) Mennyi idő alatt ér a városba Gáspár, Menyhért és Boldizsár?
b) Milyen messze van Boldizsár a várostól, amikor Menyhért épp odaér?

17. András autójának digitális üzemanyagmérője hétfőn 4,5 liter, kedden 5,28 liter, szerdán 8,42 liter benzin fogyasztását jelezte.

a) Mennyi üzemanyagot fogyasztott az autó 3 nap alatt?
b) Mennyi üzemanyag maradt az autó benzintartályában, ha András hétfőn reggel teletankolta, és a benzintank 42 literes?
c) Az autó fogyasztása kb. 5,5 liter 100 km-en. Hány km-re elegendő a szerda estére megmaradt benzin?

18. Milyen számot írhatunk a zöld jelek helyére, hogy igazak legyenek az alábbi állítások?

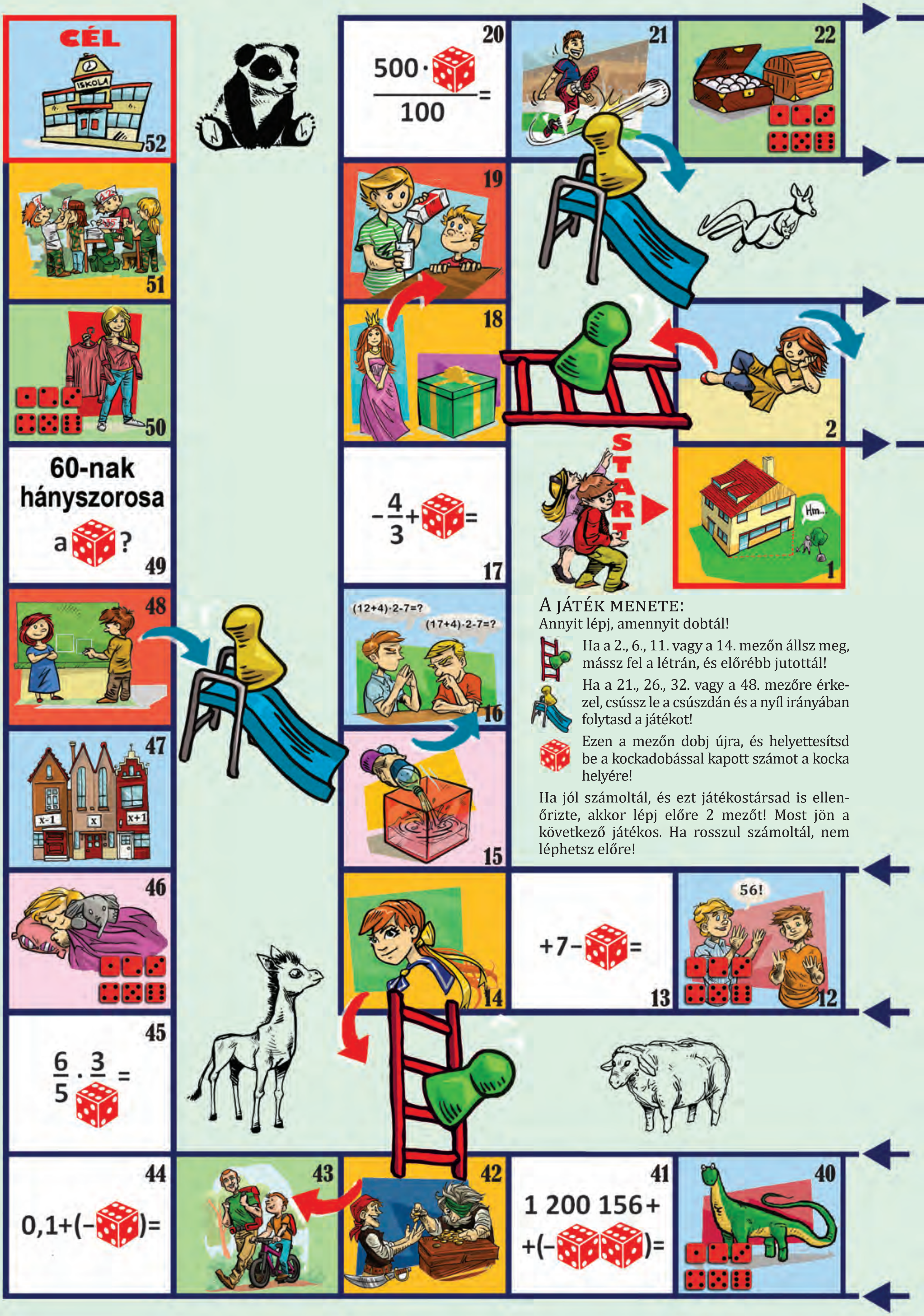
a) 1●3,451 tízesekre kerekített értéke 120?
b) 12,2■2 tizedekre kerekített értéke 12,2?
c) $3\frac{4}{5} < 2 + \frac{◆}{5}$
d) $-\frac{4}{7} > -\frac{4}{▬}$
e) 4,2❋ < 4,28
f) 12,98 > 12,9♣2

19. Kata a zöldségesnél földimogyorót vásárolt. $\frac{3}{4}$ kg mogyoróért 1650 Ft-ot fizetett. Mennyibe kerül 1 kg mogyoró?

20. Egy téglalap oldalai 7,2 cm és 9,6 cm. Hány db 1,2 cm oldalú négyzetre vágható fel a téglalap az oldalakkal párhuzamos egyenesekkel?

21. Egy baráti társaság háromnapos túrát tervezett. Az első napon megtették a tervezett táv harmadrészét, másnap a maradék távolság negyedrészét. Így az utolsó napra 17,8 km maradt.

a) A tervezett út hányad részét tették meg a második napon?
b) A tervezett túratáv hányad részét tették meg az első két napon?
c) Hány kilométert terveztek a három napra?



A JÁTÉK MENETE:

Annyit lépj, amennyit dobtál!

Ha a 2., 6., 11. vagy a 14. mezőn állsz meg, mássz fel a létrán, és előrébb jutottál!

Ha a 21., 26., 32. vagy a 48. mezőre érkezel, csússz le a csúszdán és a nyíl irányában folytasd a játékot!

Ezen a mezőn dobj újra, és helyettesítsd be a kockadobással kapott számot a kocka helyére!

Ha jól számoltál, és ezt játékostársad is ellenőrizte, akkor lépj előre 2 mezőt! Most jön a következő játékos. Ha rosszul számoltál, nem léphetsz előre!

Ha két kocka van a képletben, akkor két dobásból képezz egy kétjegyű számot, és azzal számolj!

Például: = 34.

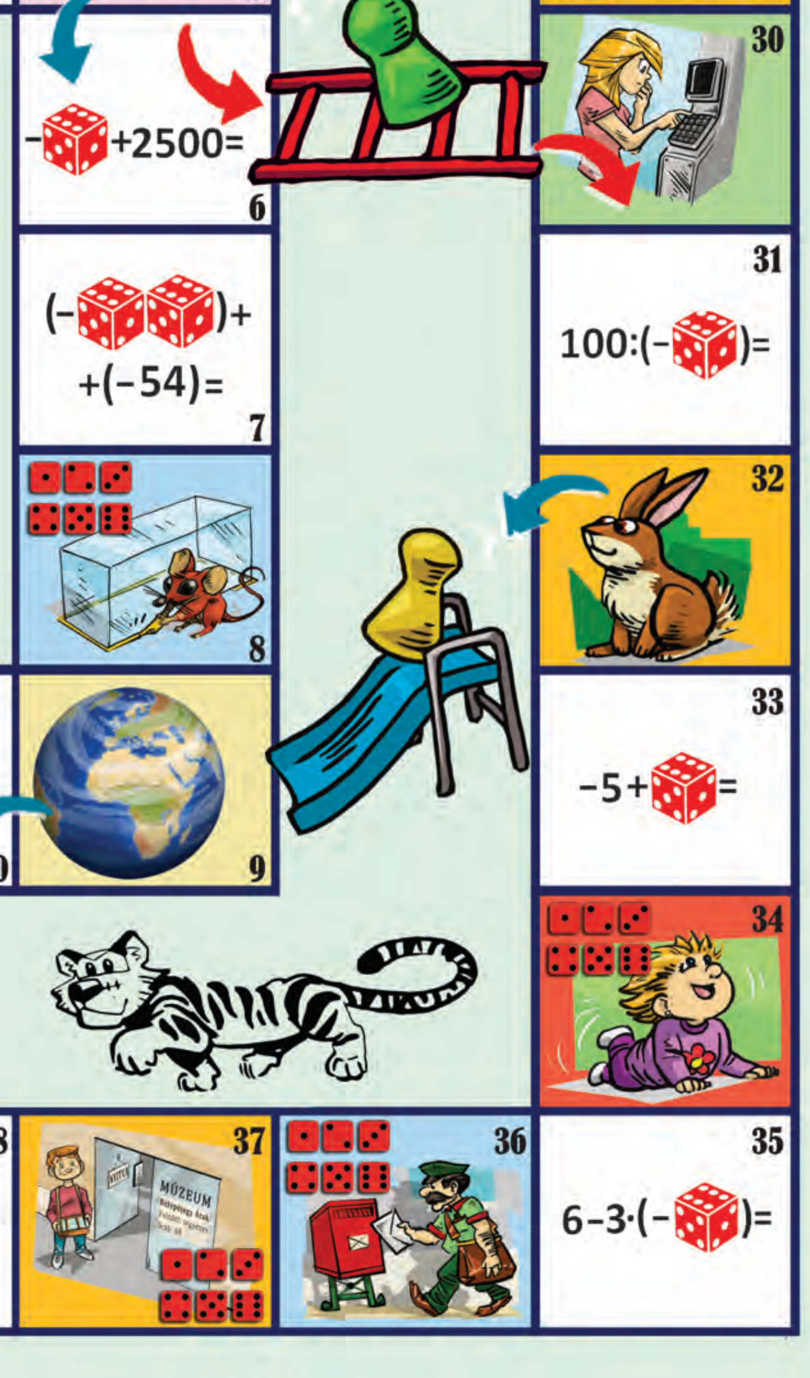
Ezen a mezőn keresd meg 2 szám legnagyobb közös osztóját! Az egyik szám a mező száma (pl. 46), a másik számhoz 2 dobásból képezz egy kétjegyű számot!

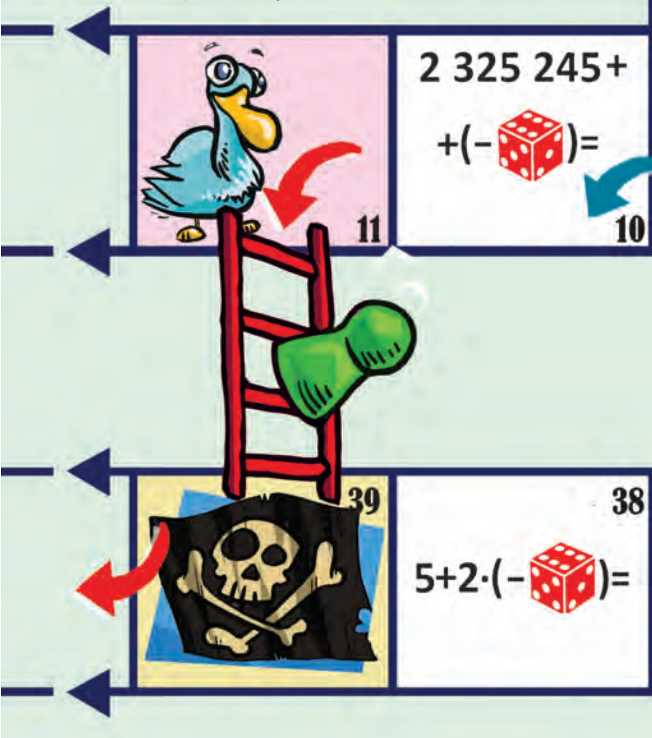
Például: = 12. A 46 és 12 legnagyobb közös osztója 2.

Ha jó az eredményed, lépj előre 3 mezőt!

Ha utolérted a másik játékost, akkor kiütötted őt, és vissza kell lépnie 3 mezőt!

A célba csak pontos dobással lehet beérkezni, ha többet dobtál, akkor visszafelé folytasd a lépkedést, és a következő körben próbálkozhatsz újra! Az a játékos nyer, aki először ér a célba.





MEGOLDÁSOK A *JÁTÉKOS FELADATOK* LECKÉHEZ

Igazmondók–hazudósok
„Holnap igazat fogok mondani.” – Ha ez igaz, akkor a következő hazudós napján is igazat mondana. Tehát ezt egy hazudós napján mondta, s következő nap is hazudós nap kell legyen, mert akkor most nem hazudna. Csak szombaton van ilyen nap.

Összeadás – a műveletek eredménye 4100.

Tréfa
Ha Emese igazat mond, akkor Péter hazudik, de akkor Tamás igazat mond, ami nem lehet, hiszen Tamás szerint Emese hazudik.
Ha Emese hazudik, akkor Péter igazat mond, és Tamás hazudik. Ebben nincs ellentmondás, mert az „Emese és Péter hazudik” állítás valóban hamis, hiszen Péter igazat mond.
Tehát Emese és Tamás hazudik, Péter igazat mond.

Régi érme
Semennyit, mert látható, hogy hamis, ugyanis azt, hogy Kr. e. 126 nem írhatták rá az érmére Krisztus születése előtt.

Víz a kútból
a) Merítsük tele a 9 literest, majd ebből töltsük meg a 4 litereset! Ekkor pontosan 5 liter marad a 9 literes vödörben.
b) Merítsük tele a 9 literest, majd ezzel töltsük meg a 4 literest kétszer, és mindkétszer öntsük ki! A maradék 1 liter vizet töltsük a 4 literesbe! Ezután újra töltsük tele a 9 litereset, és töltsünk a 4 literesbe annyit, amennyit csak lehet! Ez 4 – 1 = 3 liter, tehát éppen 6 liter marad a 9 literes vödörben.

A farkas, a kecske és a káposzta
A kecskével kell kezdeni. A pásztor átviszi a kecskét, azután visszatér, fogja a farkast, átviszi a túlpartra, otthagyja, majd visszahozza a kecskét az innenső partra. Itt hagyja a kecskét, és átviszi a farkashoz a káposztát. Végül visszatér a kecskéért, és őt is átviszi a túlpartra.

Korongok – A bal oldali korongot tegyük rá a középső korongra.

Csupa csupor
Összesen 21 csupor és 10,5 csupornyi méz van, azaz egy medvének 3,5 csupornyi méz jár. Lehet például
3t + 1f + 3ü, 3t + 1f + 3ü, 1t + 5f + 1ü

Mi a címem? – A 134-es számú házban lakom.

Hány évesek? – A nagymama 72, az anya 48 és a lány 16 éves.

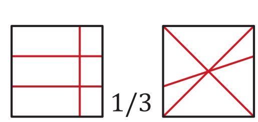
Cukorka – A 4, 2 és a 0, 14 számpár a megoldás.

Ebéd – 4 ember, 3 szék.

Tuaregek és a kincs – Tevét cseréltek, ezért mindegyik hajszolta a másikét.

Osztozkodás
A vándor hozzácsapta saját tevéjét az örökölt 17 tevéhez. Így 18 teve felét, azaz 9-et kap a legidősebb fiú, 6-ot a középső és 2-t a legkisebb. Ez 9 + 6 + 2 = 17 teve, és a vándor a sajátján eltevegelhet.

Logisztori
1. Sokféle megoldás lehetséges, például:


1/3
1/4

2. Két csészébe beleteszünk 3-3 szem kockacukrot, és az egyik csészét beletesszük az üresbe.
3. A lovas lovainak neve Péntek és Szombat.

III. Geometria, tengelyes tükrözés

A tervezett út második megállója körül keringtek. Az égbolton a csillagok szokatlan alakzatokba álltak össze, némelyiknek tegnap már nevet is adtak. Attila és Zsombi a panorámaablak előtt vitatkozott. Panni érdeklődve kapcsolódott be, mivel a két fiú beszélgetése legtöbbször valamilyen érdekes tudományos felvetés körül forgott, és Zsombort egyébként is különösen kedvelte.

– Mi a gond? – mosolygott Panni várakozóan.

– Látod az ablakon a tükröződést? – kérdezte Attila.

– Persze, idebent világos van, odakint sötét, az üveg tükörként működik – bólintott Panni.

– És nem látsz semmi furcsaságot? – firtatta Zsombi, még mindig az üveget bámulva.

Panni megvonta a vállát.

– Itt vagy te, Atis meg én… minek kéne furcsának lennie?

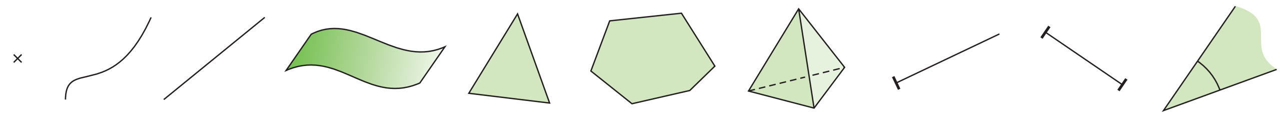
– A tükröződésnél mindig oldalt cserélünk. Én itt vagyok, te ott tükröződsz, ahol Atis áll, én meg a másik oldalon. Mintha itt nem lennének érvényesek a szabályok.

– Lehetséges – bólintott Panni –, mivel ez a Geometria bolygó, lehet, hogy körülöttünk kavarognak a szabályok, és csak azután kerül minden a helyére, ha leszálltunk. Vagy akkor sem.

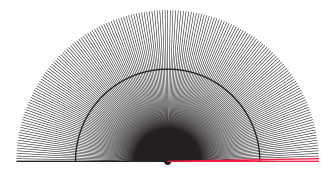
– Talán jobb lenne, ha nem néznénk a tükröződést – aggodalmaskodott Zsombor –, a végén nem fogjuk tudni, hogy valójában a tükör melyik oldalán állunk.

1. SÍKBELI ALAKZATOK

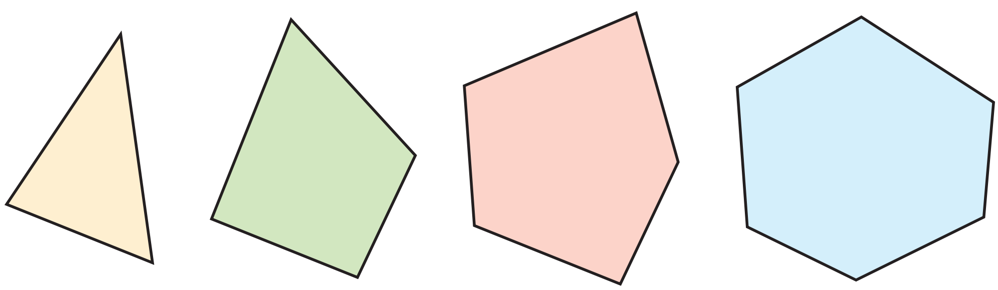
A következő szavakkal felidézzük a geometria gyakran használt fogalmait:



A szögmérés mértékegységének az egyenesszög 180-ad részét választották. Ez az 1° (1 fok).
Tudjuk, hogy 1° = 60’ (60 szögperc) és 1’ = 60” (60 szögmásodperc).
Nagyság szerint a következő elnevezéseket használjuk:
nullszög, hegyesszög, derékszög, tompaszög, egyenesszög, homorúszög, teljesszög.

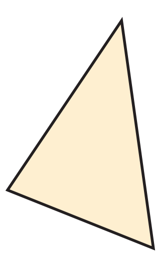


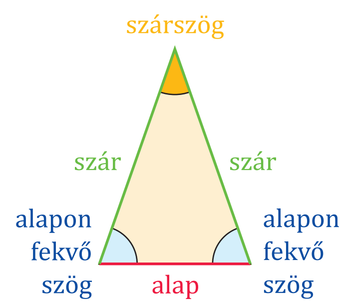
Sokszögeknek nevezzük azokat a síkidomokat, amelyeknek a határvonala csak szakaszokból áll.

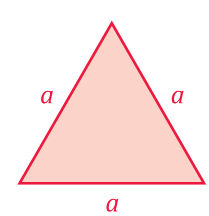


A háromszögek fajtái:

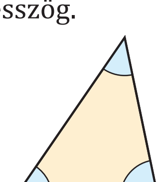
1. Az oldalak hossza szerint:
   a) **Általános háromszög:** minden oldala különböző hosszúságú.
   b) **Egyenlő szárú háromszög:** két oldala egyenlő hosszúságú.
   c) **Egyenlő oldalú (vagy szabályos) háromszög:** mindhárom oldala egyenlő hosszúságú.

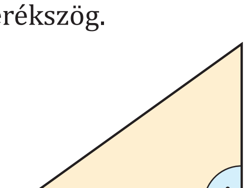


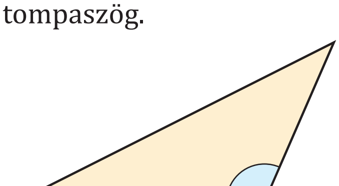




2. A szögek nagysága alapján:
   a) **Hegyesszögű háromszög:** a legnagyobb szöge (is) hegyesszög.
   b) **Derékszögű háromszög:** a legnagyobb szöge derékszög.
   c) **Tompaszögű háromszög:** a legnagyobb szöge tompaszög.



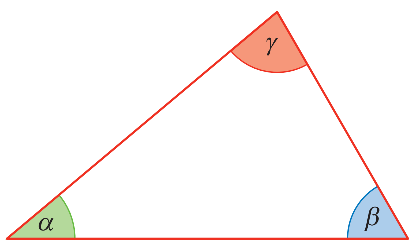


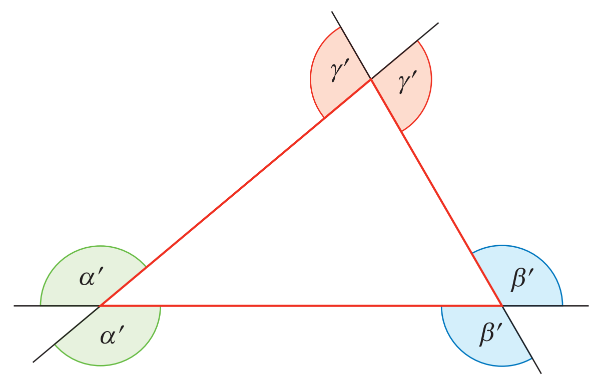


Rajzoljuk meg egy háromszög oldalegyeneseit a csúcsokon túl is! Az egyes csúcsoknál 4-4 szögtartomány keletkezik, melyek közül 2-2 egyenlő.

A háromszög két oldala által bezárt szög **a háromszög belső szöge.**
Az ábrán α, β és γ a háromszög belső szögei.

A háromszög egyik oldala és egy másik oldal meghosszabbítása által bezárt szög **a háromszög külső szöge.**
Az ábrán α', β' és γ' a háromszög külső szögei.





Ha egy témakörben vagy feladatban csak a háromszög belső szögei szerepelnek, akkor röviden csak a háromszög szögeiről beszélünk. Ha meg akarjuk különböztetni a belső és a külső szögeket, akkor használjuk a most tanult elnevezéseket.

Csoportmunka

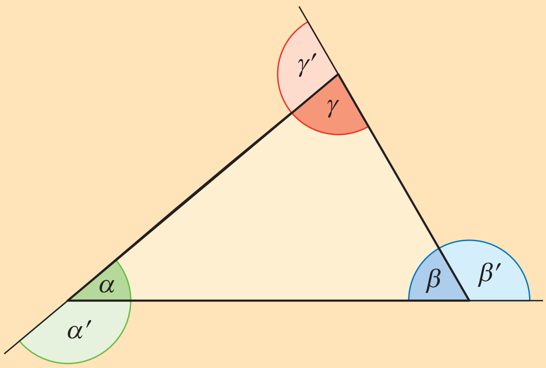
Alkossatok hat csoportot! Az egyes csoportok feladata az előző hat háromszög (általános háromszög, egyenlő szárú háromszög, egyenlő oldalú háromszög, hegyesszögű háromszög, derékszögű háromszög, tompaszögű háromszög) szögeinek megmérése és a három szög összegének kiszámítása. Ha a méréshez szükséges, hosszabbítsátok meg az egyes oldalakat.
Mennyi lett a háromszög szögeinek összege az egyes csoportokban?
Egyeztessétek az eredményeiteket!

Tapasztalhatjuk, hogy mindegyik háromszög esetén a háromszög szögeinek összege 180° körüli érték. Méréseink pontatlansága adhat egy kis eltérést, de sejtésünk a következő: **A háromszög szögeinek összege 180°.**
Sejtésünket a következő években bizonyítani is fogjuk!

A tapasztalat alapján elfogadhatjuk a következő megállapításokat:
– Az egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögei egyenlők.
– Ha egy háromszögnek van két egyenlő szöge, akkor a velük szemközti két oldal egyenlő hosszú.
Ha az egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögei egyenlők, akkor az egyenlő oldalú háromszögek mindhárom szöge egyenlő. Mivel a háromszögek szögeinek összege 180°, ezért **a szabályos háromszögek szögei 60°-osak.**

Példa

Hosszabbítsuk meg a háromszög oldalegyeneseit a csúcsokon túl! Mérjük meg a háromszög külső és belső szögeit! Igaz-e, hogy a háromszög egymás mellett fekvő belső és külső szögei 180°-ra egészítik ki egymást? Ellenőrizzük, hogy $\alpha + \beta = \gamma'$!

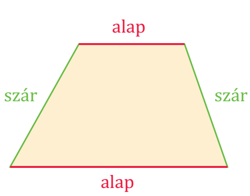


Megoldás

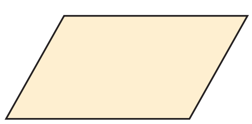
Mivel az egymás mellett fekvő külső és belső szögek egyenesszögre egészítik ki egymást, ezért összegük valóban 180°.
Mérésünk eredménye: $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$ és $\gamma = 80°$.
$\alpha' = 140°$, $\beta' = 120°$ és $\gamma' = 100°$.
$40° + 60° = 100°$, tehát $\alpha + \beta = \gamma'$.
Hasonlóan ellenőrizhetjük, hogy bármely két belső szög összege egyenlő a harmadik külső szöggel.

Speciális négyszögek:

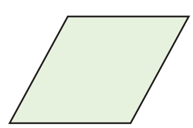
Trapéz:
van párhuzamos oldalpárja.



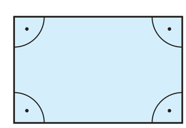
Paralelogramma:
olyan trapéz, amelynek a szárai is párhuzamosak egymással.



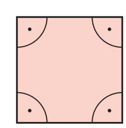
Rombusz:
olyan paralelogramma, amelynek minden oldala egyenlő hosszúságú.



Téglalap:
olyan paralelogramma, amelynek két szomszédos oldala merőleges egymásra.

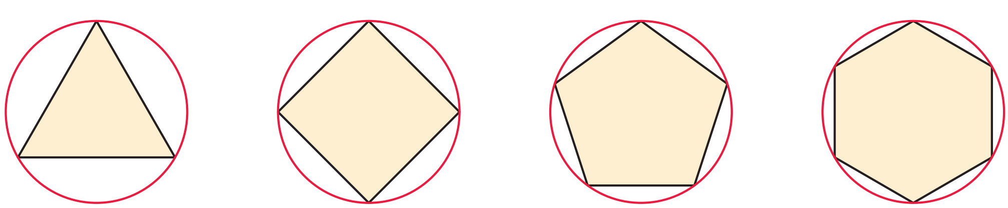


Négyzet:
olyan téglalap, amelynek két szomszédos oldala egyenlő hosszúságú.



Szabályos sokszögek:

Egy sokszög szabályos, ha egyenlő hosszúak az oldalai és egyenlő nagyságúak a szögei. A szabályos sokszög csúcsaira illeszthető egy kör. Azt mondjuk, hogy a szabályos sokszögeknek van köré írt köre. A sokszögek köré írt körén azt a kört értjük, amelyre a sokszög minden csúcsa illeszkedik.



CSOPORTMUNKA

Mérjétek meg a lerajzolt sokszögek belső szögeit! Hasonlítsátok össze az eredményeiteket! Adjátok össze sokszögenként a belső szögeket!
Mekkorák lettek az összegek? Beszéljétek meg az eredményeket!

Feladatok

1. Mekkora a háromszög hiányzó harmadik szögének nagysága, ha $\alpha + \beta + \gamma = 180°$?

a) $\beta = 69°$, $\gamma = 82°$
b) $\alpha = 22°\,36'$, $\gamma = 48°\,45'$
c) $\alpha = 52°\,52'$, $\beta = 43°\,41'$
d) $\alpha = 42°\,55'$, $\beta = 29°\,43'$

2. Tudjuk, hogy $\alpha = 27°\,42'$ és $\alpha + \beta$ tompaszög. Milyen határok között mozoghat β?

3. A 360°-ot egyenlő hegyesszögekre vágtuk. Mekkora lehet a legnagyobb hegyesszög, amit így kaphattunk?

4. Mekkora az a szög, amelyik a megadottakat 180°-ra egészíti ki?

a) 70°
b) 59°
c) 28° 42'
d) 54° 13'
e) 70° 1'
f) 71° 51'
g) 22° 55'
h) 12° 34'

5. Hogyan nevezhetjük azt a háromszöget, amelyben két szög nagysága:

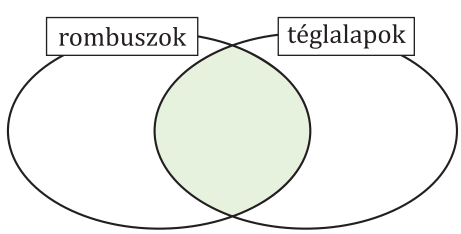
a) $\alpha = 62°$, $\beta = 28°$
b) $\alpha = 45°$, $\beta = 90°$
c) $\alpha = 52°\,51'$, $\beta = 50°\,37'$
d) $\alpha = 42°\,13'$, $\beta = 41°\,39'$?

6. Melyik állítás igaz, melyik hamis?

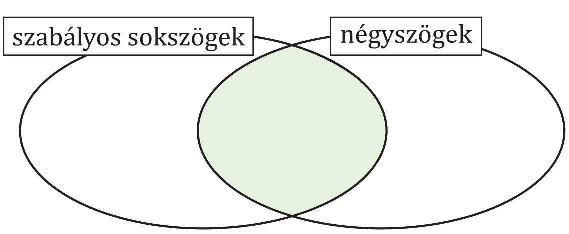
a) Minden négyzet téglalap.
b) Minden téglalap négyzet.
c) Minden trapéznak van párhuzamos oldalpárja.
d) Minden rombusz trapéz.
e) Ha egy trapéz két szára egyenlő hosszúságú, akkor az paralelogramma.
f) A paralelogrammák olyan trapézok, amelyeknek a szárai is párhuzamosak egymással.
g) Minden négyzet rombusz.
h) Minden téglalap paralelogramma.

7. Milyen síkidomok helyezkednek el a beszínezett részben?

a)



b)



8. *a)* Egy egyenlő szárú háromszög alapon fekvő egyik szöge 41°. Mekkorák a szögei?
b) Egy egyenlő szárú háromszög egyik szöge 52°. Mekkorák lehetnek a hiányzó szögei?

9. Létezik-e a háromszög, és ha igen, mekkorák a szögei:

a) egyik belső szöge 72°, egyik külső szöge pedig 144°?
b) egyik belső szöge 68°, egyik külső szöge pedig 112°?
c) két külső szöge 86° és 168°?
d) két külső szöge 60° és 40°?

2. EGYBEVÁGÓSÁG

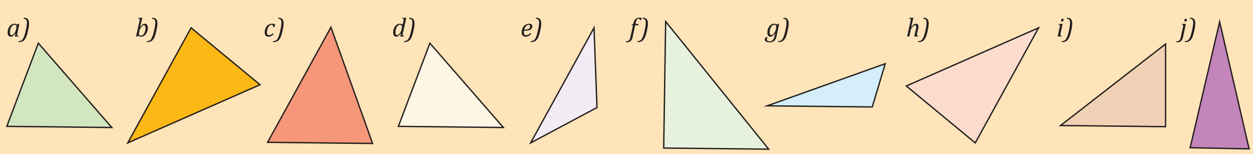
Csoportmunka

Vágjatok négy egyforma szélességű csíkra egy A4-es lapot! Egy ilyen csíkot a rövid oldalával párhuzamosan hajtsatok félbe, majd ismét és ismét, vagyis összesen háromszor! Az így kapott kis téglalapra tervezzetek valamilyen mintát! A téglalap két hosszabb oldalának egy-egy darabja legyen határvonala a megtervezett alakzatotoknak. Vágjátok körbe a vonal mentén, majd hajtogassátok ki a papírt!
Tervezzetek többet is!

Az előzőekben leírtakat mi is elvégeztük.
Ezek az alakzatok teljesen egyformák. Egyszerre vágtuk ki őket a papírból.
Azt mondjuk róluk, hogy **egybevágók.**
Két alakzatról körbevágással, másolópapírra rajzolással és egymásra illesztéssel eldönthető, hogy egybevágók-e.
Sok esetben ránézésre döntünk. Ezzel azonban óvatosan bánj!

Példa

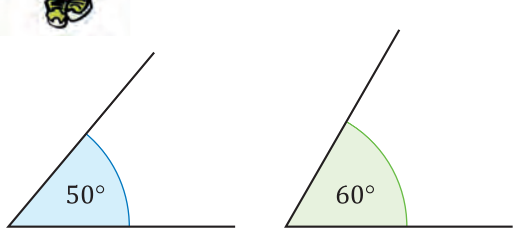
Az ábrán látható háromszögek közül mely párokat látjuk egybevágóknak?



Megoldás

Az ábrán az *a)* és *d)*, valamint a *b)* és *h)* háromszögpárok látszanak egybevágónak.

Csoportmunka



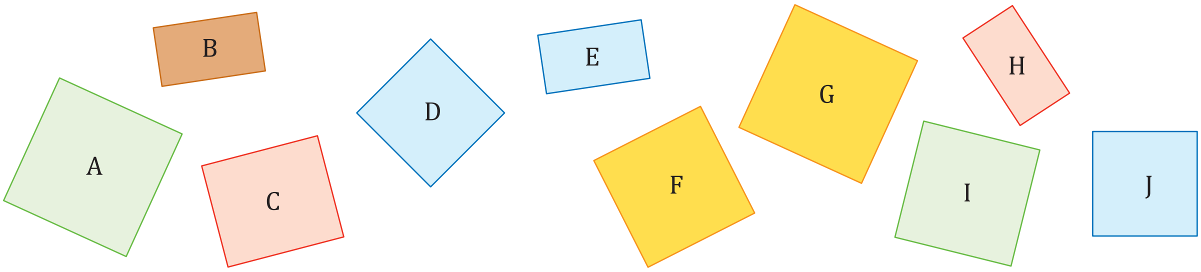
Adott egy háromszög két szöge, $\alpha = 50°$, $\beta = 60°$. A csoport minden tagja rajzoljon ilyen háromszöget egy lapra szögmérővel és vonalzóval, és vágja ki! Hasonlítsátok össze a kapott háromszögeket! Mindenkié egybevágó lett? Beszéljétek meg az eredményeket!

Kutatómunka

A legtöbb épületen találsz egybevágó részeket. Keress ilyeneket a Debreceni Egyetem épületének képén és az iskolád épületén is!

Feladatok

1. Mérd meg az ábrán látható téglalapok oldalainak hosszát! Add meg az egybevágó négyszögek betűjelét!



2. Igaz vagy hamis?
a) Ha két négyzet kerülete egyenlő, akkor azok egybevágók.
b) Ha két téglalap kerülete egyenlő, akkor azok egybevágók.
c) Ha két négyzet területe egyenlő, akkor azok egybevágók.
d) Ha két téglalap területe egyenlő, akkor azok egybevágók.
e) Ha két négyszögnek mind a négy oldala páronként egyenlő, akkor azok egybevágók.

3. Rajzoltam két háromszöget. Milyen háromszögeket rajzolhattam, ha egy-egy oldaluk hosszának egyenlőségéből már tudom, hogy egybevágók?

4. Határozd meg a hiányzó szögek nagyságát abban a háromszögben, amelynek van két 4 cm-es oldala, és van 30°-os szöge!

5. Egy négyszög oldalainak hossza: a = 1,5 cm, b = 3 cm, c = 4 cm és d = 4 cm. Az egyik átlója mentén két egyenlő szárú háromszögre vágható szét. Milyen hosszú lehet ez az átló?

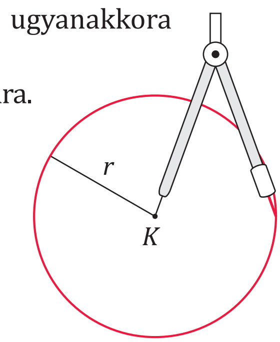
6. Rajzoltunk egy háromszöget. Van egy 7 cm és egy 8 cm hosszúságú oldala, és van egy 60 fokos szöge. Ha te is rajzolnál egy ilyen háromszöget, akkor a két háromszög biztosan egybevágó lenne? Válaszodat rajzzal szemléltesd!

3. A KÖR

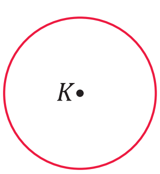
Kutatómunka

Gyűjts olyan magyar szavakat, amelyek *k*-val kezdődnek, a második mássalhangzójuk *r*, és megfelelő fantáziával kapcsolatba tudod hozni őket a körrel! Fogalmazd meg ezeket az elképzeléseidet! Az indoklásaidat rajzokkal, képekkel is szemléltetheted. A gyűjtést kiterjesztheted olyan szavakra is, amelyekben a *k* helyett *g* szerepel.

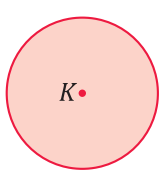
Sok tárgy kör alakú. Egy kerék, egy tányér, egy közlekedési tábla, de lehet ilyen egy fülbevaló is.



A **körvonal**at azok a síkbeli pontok alkotják, amelyek a sík egy adott pontjától ugyanakkora távolságra vannak.
Az ábrán az adott pont a *K*, ez a kör középpontja. A rögzített távolság az *r*, ez a kör sugara.
A **körlap**ot azok a síkbeli pontok alkotják, amelyek *K*-tól *r*-nél nem nagyobb távolságra vannak.
Megkülönböztettük egymástól a **körvonal**at és a **körlap**ot, de sokszor mindkettő helyett csak kört mondunk. A szövegkörnyezet fogja eldönteni, hogy melyikre gondolunk.



körvonal

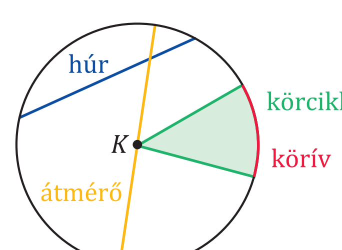


körlap

Rajzolj két különböző kört, de ugyanakkora sugárral!
Nem kell kivágnunk és egymásra illesztenünk a két kört, így is látjuk, hogy ezek egybevágóak.

További elnevezések a körrel kapcsolatban:

Húr: A körvonal két különböző pontját összekötő szakasz.
Átmérő: A kör középpontjára illeszkedő húr. Az átmérő a leghosszabb húr, a sugár kétszeresével egyenlő.
Körív: A körvonal egy darabja.
Körcikk: Egy körív és a kör két sugara által határolt síkidom.



1. példa

Egy rádióadóról a következőt olvashatjuk a világhálón: *Eger és környékének teljes területén hallgatható. Eger 25 kilométer sugarú környezetében sztereo-, 35 kilométeres környezetében pedig monominőségben fogható*. A mellékelt térképen jelöljük be ezeket a részeket!

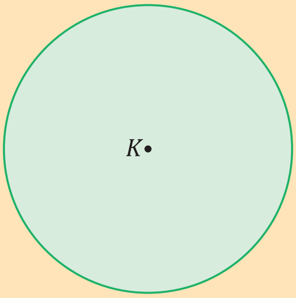
Hallgatható-e ez a rádió a következő településeken: Füzesabony, Mezőkövesd, Ózd, Putnok?
Ha igen, akkor milyen minőségben?

Megoldás

A térképvázlaton látható az Eger középpontú 25 km és a 35 km sugarú körvonal.
Az így elkészített ábrán látható, hogy Füzesabony és Mezőkövesd a kisebb körvonalon belül van, így ebben a két városban sztereóminőségben hallgatható a rádió.
Látható, hogy a kis körön kívül, de a nagy körön belül található Ózd, itt már csak monominőségben lehet rádiózni.
Putnok a nagy körön kívül található, itt már nem fogható a rádió adása.

2. példa

Az ábrán egy 2 cm sugarú zöld körlapot látunk. Adjuk meg többféleképpen a zöld pontok és a K középpont távolságát!

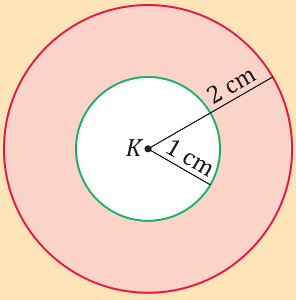


Megoldás

A zöld pontok K-tól mért távolsága 2 centiméternél **kisebb vagy egyenlő**.
A zöld pontok K-tól mért távolsága **legfeljebb** 2 centiméter.
A zöld pontok K-tól mért távolsága **nem nagyobb**, mint 2 cm.
A zöld pontok K-tól mért távolsága **maximum** 2 cm.

3. példa

Mit mondhatunk az ábra piros pontjainak és a K középpontnak a távolságáról?

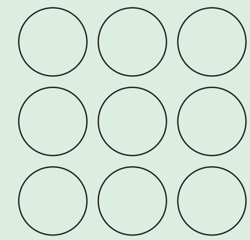


Megoldás

A kisebb körvonal nem piros, ezért a következőt állapíthatjuk meg:
Minden piros pont K-tól mért távolsága 1 cm-nél nagyobb, de 2 cm-nél nem nagyobb. Matematikai jelekkel így írjuk le röviden: $1\text{ cm} < KP \leq 2\text{ cm}$, ahol P egy tetszőleges piros pontot jelöl, a KP pedig a K és a P pont távolságát.

Rejtvény

Rajzold le az ábrát a füzetedbe! Rajzolj hozzá még három kört úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban négy-négy kör legyen!



Tervezz! Alkoss!

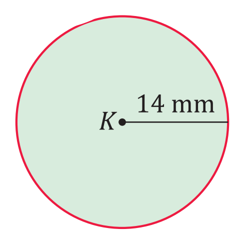
Rajzolj körvonalak, körívek segítségével egyszerű és szép ábrákat! Olyan ábrákat tervezz és szerkessz, mintha egy cég vagy egy márka logóját kellene megalkotnod!

Feladatok

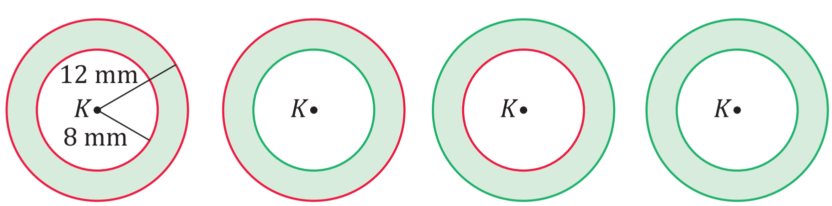
1. Rajzolj a füzetedbe egy *K* középpontú, 2 cm sugarú kört! Hol helyezkednek el a körlapon azok a pontok, amelyeknek a *K* ponttól mért távolsága 12 mm-nél

a) nagyobb; *b)* kisebb; *c)* nem nagyobb; *d)* nem kisebb?

2. Add meg a zöld tartományt szöveggel és matematikai jelekkel is!



3. Add meg a zöld tartományokat matematikai jelekkel!



4. Vegyél fel egy *K* pontot a füzetedben, és színezd azokat a pontokat, amelyek *K*-tól mért távolsága nagyobb, mint 8 mm, de nem nagyobb, mint 15 mm!

5. Vegyél fel egy *K* pontot a füzetedben, és színezd azokat a pontokat, amelyek *K*-tól mért távolsága kisebb, mint 2 cm, de nem kisebb, mint 14 mm!

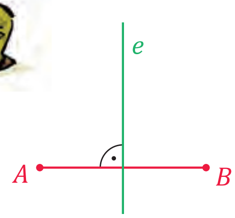
6. Rajzolj egy kört és egy egyenest! Hányféle helyzetben tudod őket lerajzolni? Nevezd el az ábráid fontos szereplőit!

7. Rajzolj két kört! Hányféle helyzetben tudod őket lerajzolni?

8. Rajzolj a füzetedbe egy 3 cm sugarú kört! A körvonalon jelölj egy *A* pontot! Hány olyan *A* végpontú húr van a körben, amelyiknek a hossza centiméterben mérve egész szám? Készítsd el az ábrát! Színezéssel szépítheted is.

Csoportmunka

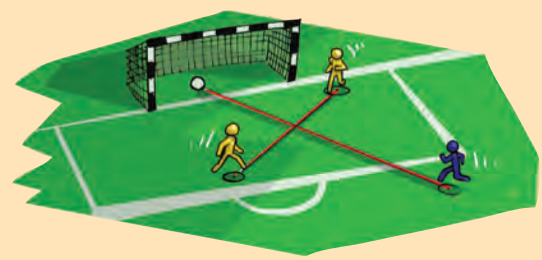
Hajtsatok ketté egy írólapot egy tetszőleges egyenes mentén! Ezután a körzőtökkel szúrjátok át a dupla lapot! Nyissátok szét az írólapot, és pirossal kössétek össze az így létrehozott két pontot! Az egyik végpont legyen A, a másik legyen B! A hajtásvonalat a vonalzótok segítségével rajzoljátok meg zöld színnel! Válasszatok tetszőleges zöld pontokat, és mérjétek meg az A és a B ponttól vett távolságukat! Mit tapasztaltok?



Az AB szakaszt az ábrán látható e egyenes merőlegesen metszi és felezi is.

Ezt az egyenest a **szakasz felezőmerőleges**ének nevezzük. A szakasz felezőmerőlegesének minden pontja egyenlő távolságra van a szakasz két végpontjától.

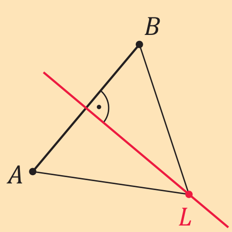
Példa



A két védő között a csatár úgy rúgta a labdát a hálóba, hogy a labda végig mindkét játékostól azonos távolságra volt.

Ez a mondat egy futballmérkőzésen hangzott el.

Az adott pillanatban tudjuk a két védőjátékos és a labda helyét. A hallottak alapján hogyan képzeljük el a labda útját?



Megoldás

A rajzunkon az A és a B pont jelöli a két védőjátékos helyét, L-lel pedig a labda helyét jelöltük. Tudjuk, hogy a labda mindig egyenlő távolságra volt a két focistától, ezért már a kiindulóhelyzetben olyan L pontot rajzoltunk, amely esetén $AL = BL$. A labda az ábrán látható AB szakasz felezőmerőlegesén halad.

Feladatok

1. Rajzolj vázlatot, ha az F fa és a B bokor között az ösvényen sétáló Piroska minden pillanatban ugyanolyan messze volt a fától, mint a bokortól! (A vázlatodon a fa és a bokor egy-egy pont, az ösvény egy vonal legyen!)

2. Rajzolj egy vázlatot, ha tudod, hogy az O oszlop és a H ház között felezőmerőlegesként halad egy út! (A vázlatodon az oszlop és a ház egy-egy pont, az út pedig egy egyenes legyen!)

3. Egy papírlapon jelölj ki három pontot, amelyek nincsenek egy egyenesen! Minden lehetséges módon hajtsd össze a papírlapot úgy, hogy két-két pont fedésbe kerüljön! Milyen egyeneseket kaptál a hajtásvonalakkal?

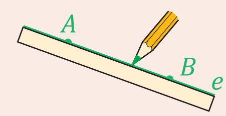
4. Rajzoltunk egy egyenest és egy rá nem illeszkedő pontot egy papírlapra. Ez a pont egy olyan szakasznak az egyik végpontja, amelynek a papíron lévő egyenes a felezőmerőlegese. Hogyan keresnéd meg a szakasz hiányzó végpontját?

5. SZERKESZTÉSEK

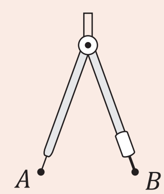
A geometriai ábrák készítéséhez vonalzót és körzőt használunk. (Persze nem árt egy papírlap és egy hegyes ceruza sem.) **Szerkesztés**ről akkor beszélünk, ha a vonalzó merőleges, illetve párhuzamos éleit nem használjuk, ezért úgy szoktak fogalmazni, hogy a szerkesztésnél a **körző** mellett egy **egyélű vonalzó**ra van szükségünk.

A görög Eukleidész Kr. e. 300 körül élt. Legismertebb műve az *Elemek*, melyben összefoglalta korának matematikai eredményeit. Körülbelül 2000 éven keresztül ezt a könyvet tekintették a matematika, és ezen belül a geometria alapjának. Megfogalmazta, hogy mit fogadunk el magától értetődő dolognak, és mit tekintünk geometriai szerkesztésnek. Megalkotta az úgynevezett euklideszi geometriát. Eukleidész által elismert szerkesztési lépések voltak például a következők:

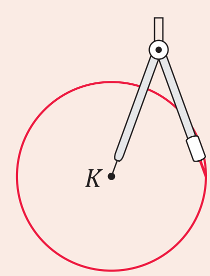
1. A vonalzót két adott ponthoz illesztve meghúzhatjuk a két pontra illeszkedő egyenest.



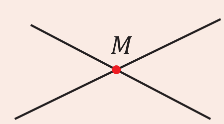
2. Két pont távolságát körzőnyílásba vehetjük.



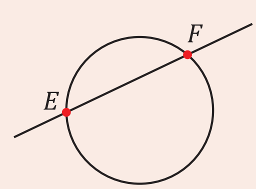
3. Adott pont körül adott szakasszal (sugárral) kört rajzolhatunk.



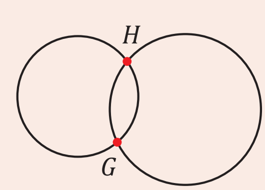
4. Két egyenes metszéspontja meghatározott.



5. Egyenes és kör metszéspontjai meghatározottak.



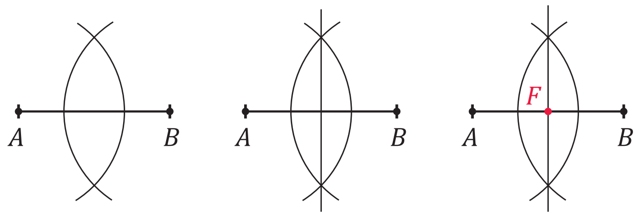
6. Két kör metszéspontjai is meghatározottak.



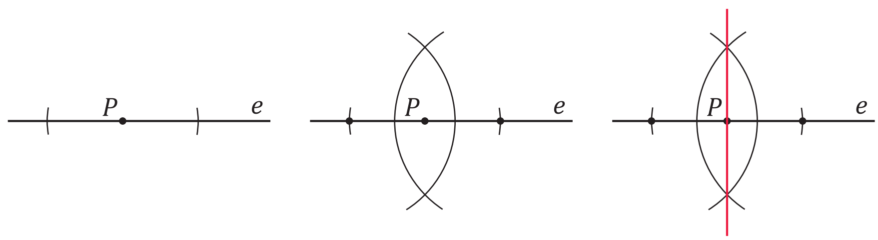
A szerkesztések során gyakran kell elvégeznünk valamelyik itt bemutatott, egyszerű szerkesztési lépést, esetleg több lépést egymás után.

Szakasz másolása:

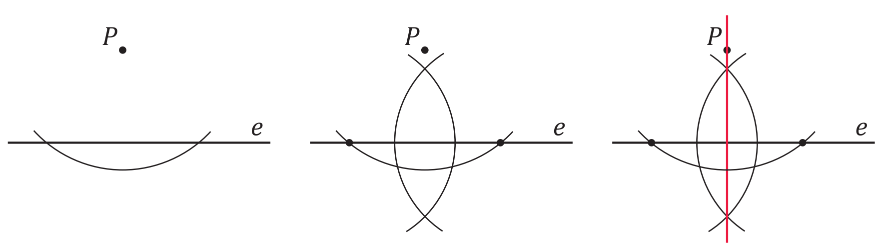
Szakasz felezése:



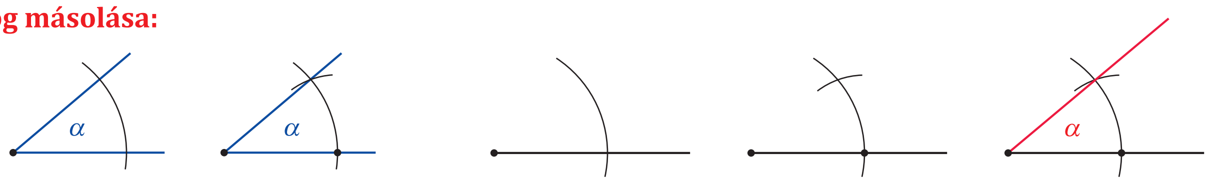
Az *e* egyenes egy *P* pontjában merőlegest állíthatunk az egyenesre:



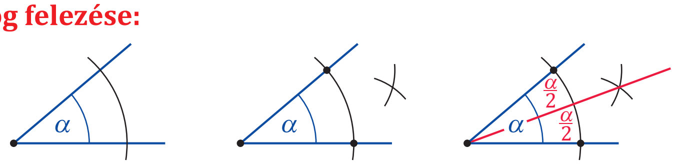
Az *e* egyenesre egy *P* pontból merőlegest szerkeszthetünk:



Szög másolása:



Szög felezése:



KUTATÓMUNKA

Készíts egy rövid előadást Eukleidészről!

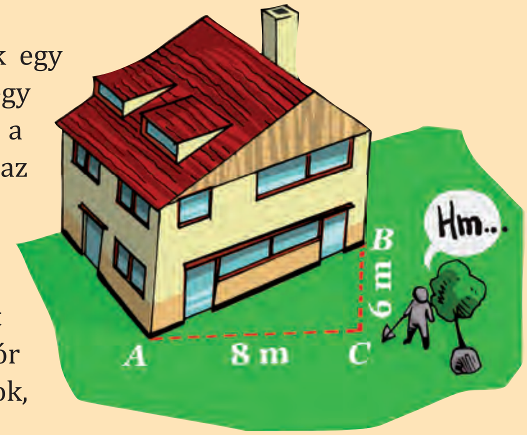
Megjegyzések

1. Ismerjük a merőleges szerkesztését, tudunk szöget felezni, szöget másolni, ezért 45°-os, 22,5°-os, 135°-os, 225°-os stb. szöget is tudunk szerkeszteni.
2. 60°-os szöget tudunk szerkeszteni (szerkesztünk egy szabályos háromszöget, annak minden szöge 60°-os). Szögfelezéssel, szögmásolással eljuthatunk a 30°-os, 15°-os, 75°-os, 120°-os, 150°-os stb. szögek szerkesztéséhez is.

1. példa

Péter az udvarban fát szeretne ültetni. A házuk 10 méter hosszú. Kigondolta, hogy a fa a ház elejének bal sarkától 8 méterre, a végétől 6 méterre legyen. Az ültetéshez ki kell ásni egy gödröt. Hogyan jelölje ki ennek a gödörnek a helyét?

Megoldás



A ház bal sarkától, az *A* ponttól 8 méterre lévő pontok egy *A* középpontú 8 méter sugarú körre illeszkednek. Ha egy 8 méter hosszú zsinórt rögzítünk az *A* pontban, akkor a másik vége megmutatja, hogy hol lehetnek azok a pontok az udvarban, amelyek a ház elejétől 8 méterre találhatóak.
A helyük megjelölhető a talajon.
A ház végétől, a *B* ponttól 6 méterre lévő pontok egy *B* középpontú 6 méter sugarú körre illeszkednek. Most egy 6 méter hosszú zsinórt rögzítünk a *B* pontban. A zsinór másik vége megmutatja, hogy hol lehetnek azok a pontok, amelyek a ház végétől 6 méterre találhatóak.
Ezeknek is megjelölhető a helye a talajon.
A **két körvonal metszéspontja** rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Itt kezdheti Péter a gödör ásását.

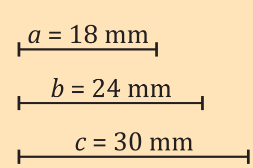
2. példa

Szeretnénk tudni, hogy az előző példában elültetett fa milyen messze van a ház falától.

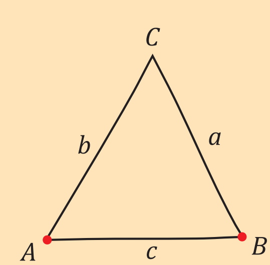
Megoldás

Legyen a fa helye *C*. A kérdés így fogalmazható meg:
Az *ABC* háromszög *C* csúcsa milyen messze van a szemközti oldaltól, ha *AB* = 10 méter, *AC* = 8 méter, *BC* = 6 méter?
Szerkesszük meg a háromszöget, majd mérjük meg a kérdéses távolságot!

Ami a valóságban 1 m, az a rajzunkon legyen 3 mm, vagyis 10 m helyett 30 mm-rel, 8 m helyett 24 mm-rel, 6 méter helyett 18 mm-rel fogunk dolgozni.



Készítsünk **vázlat**ot!

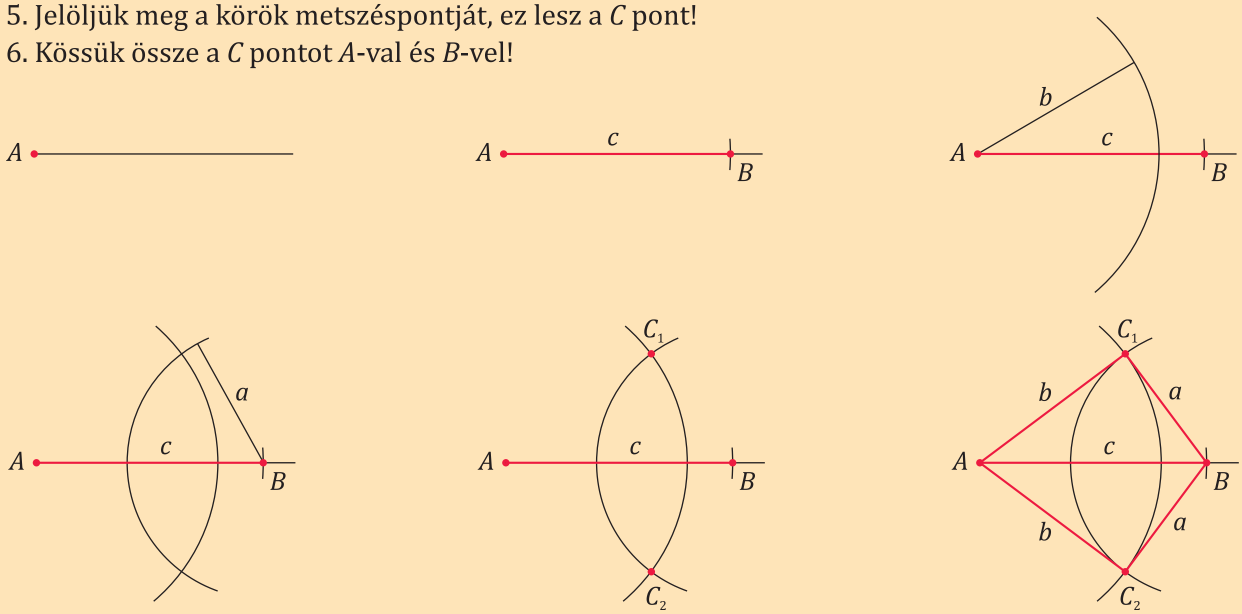


Ez a szabadkézi vázlatrajz úgy mutatja az adatokkal a háromszöget, mintha már készen lennénk a szerkesztéssel. A két • azt jelenti, hogy az *A* és a *B* pontok felvételével, vagyis az *AB* szakasz megrajzolásával fogjuk kezdeni a szerkesztést.

Tudjuk, hogy a még ismeretlen *C* pont az *A*-tól 8 m-re (a rajzunkon 24 mm-re), a *B*-től 6 m-re (a rajzunkon 18 mm-re) található.

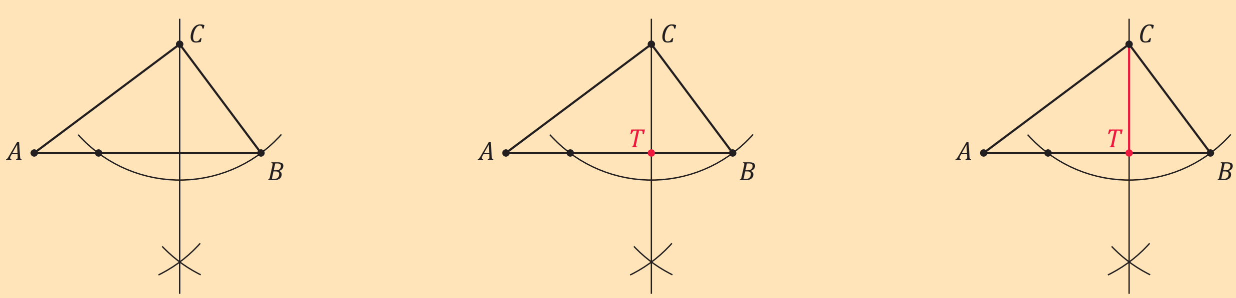
Fogalmazzuk meg a szerkesztés lépéseit!

1. Vegyünk fel egy A kezdőpontú félegyenest!
2. Vegyük körzőnyílásba a c szakaszt, és ezt A-ból másoljuk a félegyenesre! Így megkapjuk a B pontot.
3. Rajzoljuk meg az A középpontú, b sugarú kört!
4. Rajzoljuk meg a B középpontú, a sugarú kört!
5. Jelöljük meg a körök metszéspontját, ez lesz a C pont!
6. Kössük össze a C pontot A-val és B-vel!



Látható, hogy a két körnek két metszéspontja van: C_1 és C_2. Mindkettő teljesíti a feladat feltételeit, de csak az egyik van az udvaron, a másik a házban (vagy azon túl) lenne! Az ABC_1 és az ABC_2 háromszögek egybevágók, ezért AB-től bármelyik C pont távolságát megmérhetjük. Ennek lépései:

7. A C pontból merőleges egyenest szerkesztünk AB-re.
8. Jelöljük meg a két egyenes metszéspontját T-vel!
9. Megmérjük a CT szakasz hosszát.



A CT szakasz kb. 15 mm hosszú lett a szerkesztett ábránkon. Ami a rajzunkon 3 mm, az a valóságban 1 m. Vagyis a fát körülbelül 5 méterre kell ültetni a ház falától.

Összefoglaljuk a szerkesztések legfontosabb mozzanatait:
A feladat megértése után rögzítsük az **adatok**at! Ez után készítsünk **vázlatrajz**ot!
Az adatok közötti összefüggések felhasználásával tervezzük meg **a szerkesztés lépései**t!
Végezzük el a **szerkesztés**t!
Ellenőrizzük, hogy valóban a feltételeknek megfelelő alakzatot hoztuk-e létre!

Kutatómunka

Keress az interneten vagy az appboltban olyan szabadon használható alkalmazást, amelyikkel szerkeszteni lehet! Az osztályban gyűjtsétek össze, miket találtatok, és próbáljátok ki őket!

Feladatok

1. Rajzolj a füzetedbe egy tetszőleges szakaszt, majd szerkeszd meg a felezőmerőlegesét!

2. Rajzolj egy téglalapot! Szerkeszd meg a következő egyeneseket!

a) Az egyik átló felezőmerőlegese.

b) A hosszabb oldal felezőmerőlegese.

3. Az ábrán *A*-val és *B*-vel egy-egy fa helyét jelöltük, az *e* pedig egy ösvény. Az ösvény mellett elástak egy kincsesládát. A láda mindkét fától ugyanolyan messze található. Rajzolj a füzetedbe egy ehhez hasonlító térképvázlatot, majd szerkesztéssel keresd meg a láda helyét!

4. Szerkeszd meg a füzetedben az ábrákat!

5. Rajzolj egy kört, és rajzolj bele három tetszőleges húrt! Szerkeszd meg a húrok felezőmerőlegesét! Mit tapasztalsz?

6. Szerkesztéssel vágj egy adott szakaszt négy egyenlő részre!

7. Szerkeszd meg egy adott szakasz másfélszeresét!

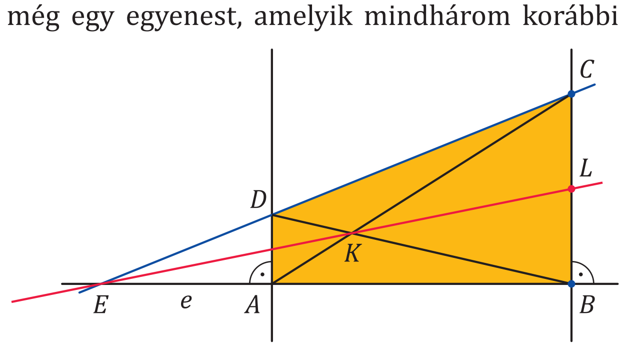
8. Szerkessz 60°-os szöget, majd felezd el! Gyűjts össze minél több olyan szöget, amelyiket meg tudsz szerkeszteni!

9. Rajzolj egy *e* egyenest, és állíts rá két különböző pontban egy-egy merőlegest! Készíts vázlatrajzot!

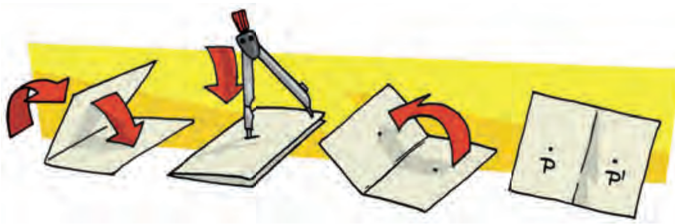
a) Milyen helyzetűek lesznek ezek a merőleges egyenesek?

b) Milyen helyzetűek lesznek azok az egyenesek, amelyek 45°-os szöget zárnak be az *e* egyenessel?

10. Rajzolj egy *e* egyenest, és állíts rá két különböző pontban egy-egy merőlegest! Most már csak a vonalzódra lesz szükséged. Vegyél fel még egy egyenest, amelyik mindhárom korábbi egyenest metszi, hasonlóan ahhoz, ahogy az ábrán a kék egyenest látod! Húzd meg a keletkezett *ABCD* négyszög átlóit, és a rajzon pirossal jelölt egyenest! Nevezd el a kapott metszéspontokat a mintán látottak szerint. Mérd meg a vonalzóddal a *BL* és a *CL* szakasz hosszát! Mit kaptál?



Hajts ketté egy papírlapot! A körződdel szúrd át az így kapott dupla lapot! A hajtásvonalat nevezd el *t* egyenesnek! Az egyik szúrás helye legyen a *P* pont, a másik pedig legyen *P'* pont.
Vizsgáljuk az így kapott ábrát!

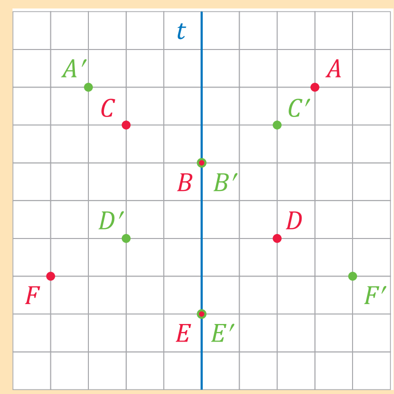


A *PP'* szakasznak a *t* egyenes a felezőmerőlegese. Az ábra olyan, mintha a *t* egy tükör lenne, és a *P* pont a tükörben a *P'* helyre kerülne. Csak nem térben történik ez az átalakulás, hanem síkban.
Azt mondjuk, hogy a *P* képe a *P'*.

A *t* egyenest tükörtengelynek (röviden tengelynek) nevezzük.
A sík bármely pontjának megkereshetjük a képét. A tengelyen lévő pont képe önmaga lesz.

1. példa

A négyzetháló egyik egyenese legyen a tengely. Rajzoljunk a tengely mindkét oldalára és a tengelyre is néhány pontot! Rajzoljuk meg a pontok tükörképét!



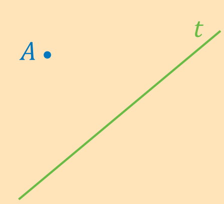
Megoldás

A tükörkép és az eredeti pont olyan szakaszt alkotnak, amelynek felezőmerőlegese a *t* egyenes.
Az *A, B, C, D, E, F* pontok tükörképei ugyanebben a sorrendben: *A', B', C', D', E', F'*.

Ha nem négyzethálón dolgozunk, vagy nem akarjuk körzővel átszúrni a lapunkat, akkor is szeretnénk meghatározni a tükörképeket. Hogyan lehet egy pont tükörképét megszerkeszteni?
A szerkesztéshez használhatjuk a megállapításunkat, vagyis a tengely a pont és a képe által meghatározott szakasz felezőmerőlegese.

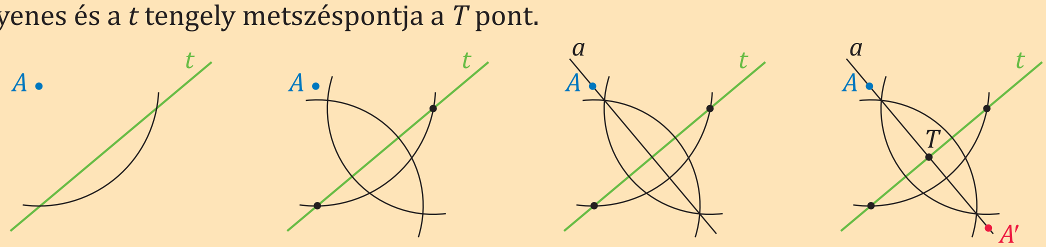
2. példa

Adott az *A* pont és a *t* tengely. Szerkesszük meg az *A* pont *t* tengelyre vett tükörképét!



Megoldás

Az *A* pontból merőlegest állítunk a *t* tengelyre, ez az *a* egyenes.
Az *a* egyenes és a *t* tengely metszéspontja a *T* pont.

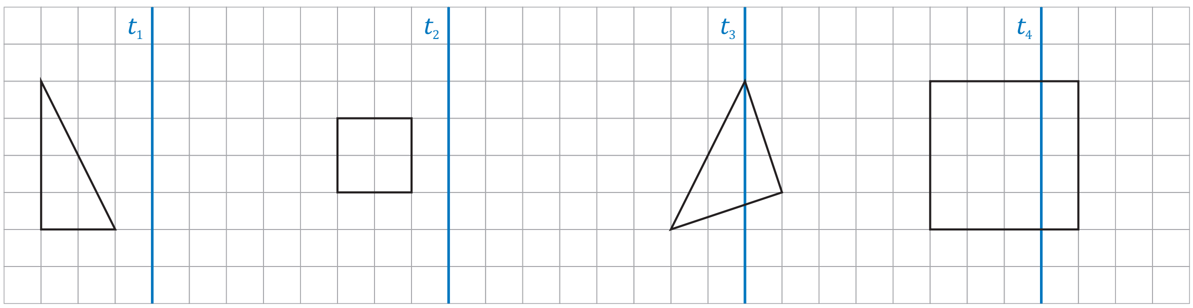


A *TA* távolságot a körzőnkkel felmérjük az *a* egyenesen a *t* másik oldalán is. Így megkapjuk az *A'* tükörképet. Hogyan tudnád a szerkesztés lépéseinek számát csökkenteni?

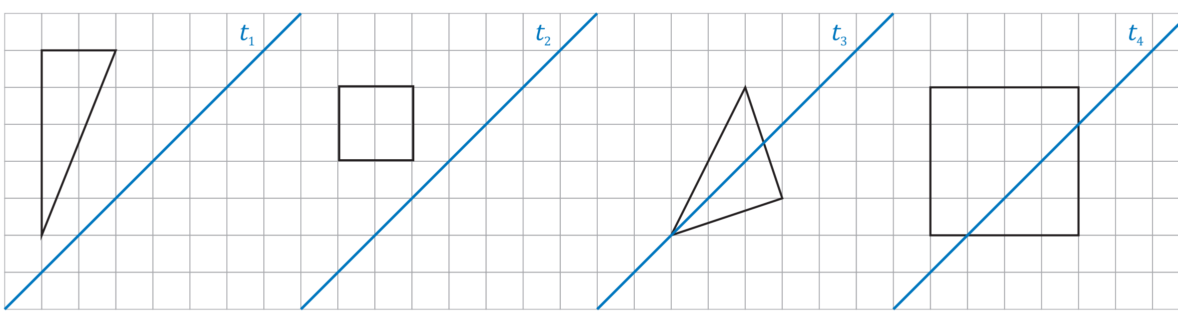
6. TENGELYES TÜKRÖZÉS

Feladatok

1. Másold át a füzetedbe az ábrákat! Rajzold meg szabadkézzel, a négyzetrács segítségével a síkidomok csúcsainak tükörképeit! A tükörképként kapott pontokat kösd össze a megfelelő sorrendben!



2. Másold át a füzetedbe az ábrákat! Rajzold meg szabad kézzel, a négyzetrács segítségével a síkidomok csúcsainak tükörképeit! A tükörképként kapott pontokat kösd össze a megfelelő sorrendben!



3. Rajzolj egy háromszöget! Vegyél fel egy tengelyt az egyik csúcsán át! A tengely ne vágjon bele a háromszögbe! Szerkeszd meg a háromszög három csúcsának tükörképét! A tükörképeket kösd össze!

4. Rajzolj a füzetedbe egy *A*, egy *B* és egy *A’* pontot!
a) Szerkeszd meg a tengelyt, ha tudod, hogy az *A* pont képe az *A’*!
b) Szerkeszd meg a *B* pont képét!

5. Adott a *t* egyenes és a rá nem illeszkedő *B’* pont. Szerkeszd meg a *B* pontot, ha tudod, hogy a *t* tengelyre vett tükörképe a *B’*!

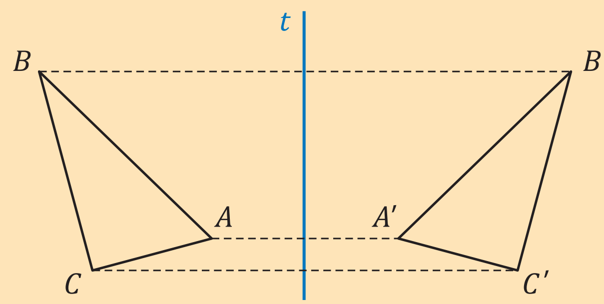
6. Rajzolj egy négyzetet! Vegyél fel egy tengelyt az egyik csúcsán át! A tengely ne vágjon bele a négyzetbe! Szerkeszd meg a négyzet négy csúcsának tükörképét! A tükörképeket kösd össze a megfelelő sorrendben!

7. Szerkessz egy négyzetet és minden oldalra kifelé egy-egy szabályos háromszöget! Az így kapott nyolc pontot nevezd el! Sorold fel azokat a pontpárokat, amelyekre úgy tudnál tengelyt rajzolni, hogy a megnevezett nyolc pont mindegyikének a tükörképe is szerepel az ábrán!

A tengelyes tükrözés végrehajtásakor láttuk, hogy a sík minden tengelyre nem illeszkedő pontja ugyanolyan távolságra van a tengelytől, mint a képe.
A tengelyen lévő pontok helyben – idegen szóval fixen – maradnak. Vagyis a pont és a képe is nulla távolságra van a tengelytől.
Láttuk, hogy minden pontnak pontosan egy képe van, és minden képhez egyértelműen meghatározhatjuk az eredeti pontot.
Korábban már tükröztük a háromszög csúcsait, aztán a képként kapott pontokat összekötöttük. A háromszög oldalegyenesére illeszkedő további pontokat nem tükröztük. Azt feltételeztük, hogy az egyenes a tükrözés után is egyenes lesz.
A tengelyes tükrözés egyenestartó, mert az egyenes képe egyenes.
Ezt a tulajdonságot használva elegendő egy sokszög csúcsait tükröznünk. A képként kapott pontok összekötésével megkapjuk a sokszög tükörképét.

1. példa

Tükrözzünk egy háromszöget egy egyenesre! Mérjük meg és hasonlítsuk össze a két háromszög
a) oldalainak hosszát;
b) szögeinek nagyságát!



Megoldás

a) Az ABC háromszög oldalainak a hossza: $AB = 2{,}4$ cm, $BC = 2{,}4$ cm, $AC = 1{,}4$ cm.
Az $A'B'C'$ háromszög oldalainak a hossza: $A'B' = 2{,}8$ cm, $B'C' = 2{,}4$ cm, $A'C' = 1{,}4$ cm.
Méréseink azt mutatják, hogy a háromszög oldalainak hossza nem változott a tükrözés során.
b) Az ABC háromszög szögeinek nagysága: $ABC\sphericalangle = 30°$, $BCA\sphericalangle = 90°$, $CAB\sphericalangle = 60°$.
Az $A'B'C'$ háromszög szögeinek nagysága: $A'B'C'\sphericalangle = 30°$, $B'C'A'\sphericalangle = 90°$, $C'A'B'\sphericalangle = 60°$.
Méréseink azt mutatják, hogy a háromszög szögeinek nagysága sem változott a tükrözés során.

A tengelyes tükrözés a szakaszok hosszát és a szögek nagyságát nem változtatja meg.

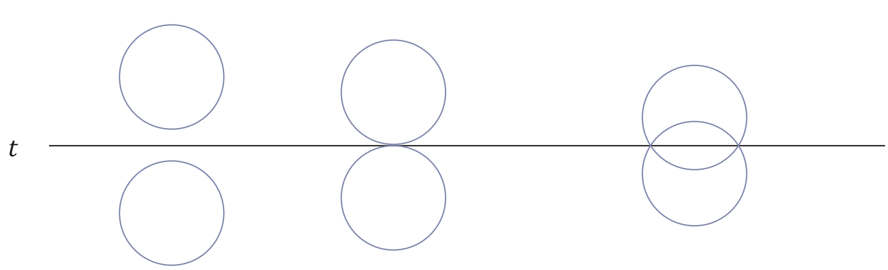
A tengelyes tükrözés távolságtartó és szögtartó.

Az ilyen tulajdonságú átalakulásokat (szakszóval: transzformációkat) egybevágósági transzformációknak nevezzük. A transzformáció idegen szó, jelentése átalakítás, átváltoztatás.
Az egybevágóság jele: $\cong$.

A tengelyes tükrözés egybevágósági transzformáció.

A példában látott egybevágóságot röviden így írjuk:
$ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$ (az ABC háromszög egybevágó az $A'B'C'$ háromszöggel).

A kör tengelyes tükörképe is kör, azaz **a tengelyes tükrözés körtartó.**

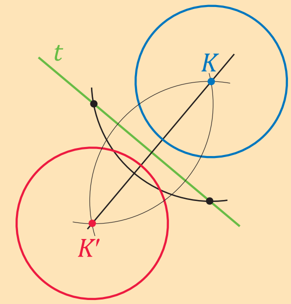


2. példa

Tükrözzünk egy kört egy adott tengelyre!

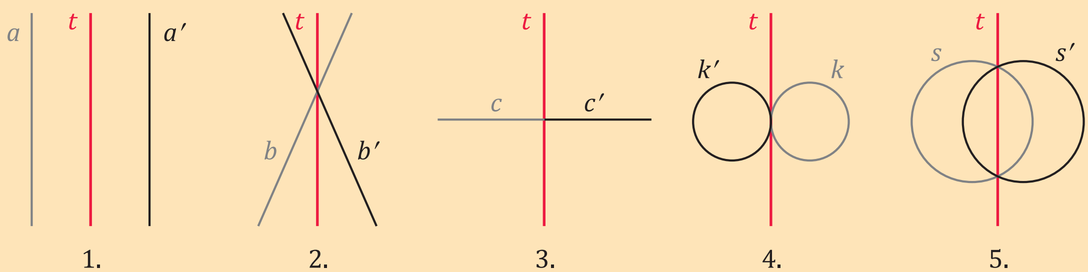
Megoldás

Mivel a tengelyes tükrözés körtartó és távolságtartó, ezért elegendő a kör középpontját tükröznünk. Az így kapott középpont körül az eredeti sugárral megrajzoljuk a képet.



3. példa

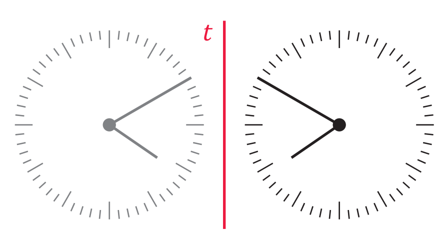
Az ábrák alapján fogalmazzunk meg további tulajdonságokat a tengelyes tükrözésről!



Megoldás

1. **A tengellyel párhuzamos egyenes tükörképe is párhuzamos a tengellyel. Mindkét egyenes ugyanolyan távolságra van a tengelytől.**
2. **A tengelyt metsző egyenes és képe a tengelyen metszik egymást. A két egyenes szögét a tengely felezi.**
3. **A tengelyre merőleges egyenes képe önmaga.**
4. **Ha egy kör érinti a tengelyt, akkor a képe ugyanott érinti a tengelyt.**
5. **Ha egy kör metszi a tengelyt, akkor a képe ugyanott metszi a tengelyt.**

Tükröztük az óra számlapját.
A tükörképen a mutatók az eredetihez képest ellentétes irányba haladnának.



A tengelyes tükrözés megváltoztatja a forgási (körüljárási) irányt.

Az óramutató járásával ellenkező forgási irányt pozitívnak, az óramutató járásával egyezőt negatívnak szoktuk nevezni.

Például fodrászatokban szoktak a székek háta mögött ilyen órát elhelyezni. Vajon miért?

Feladatok

1. Rajzolj egy téglalapot, és tükrözd

a) a rövidebb oldalegyenesére; *b)* a hosszabb oldalegyenesére;
c) az átló egyenesére; *d)* egy tetszőleges, a középpontjára illeszkedő egyenesre!

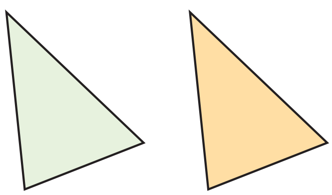
2. Szerkeszd meg a tükörképét

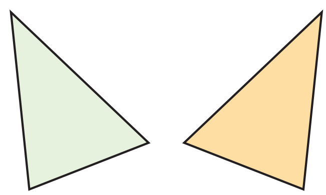
a) egy félkörnek; *b)* egy negyed körnek!

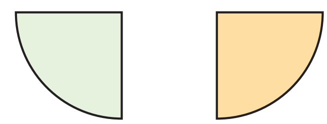
3. Szerkeszd meg egy négyzet tükörképét, ha a tengely illeszkedik

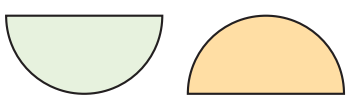
a) két szomszédos oldal; *b)* két szemközti oldal
felezőpontjára!

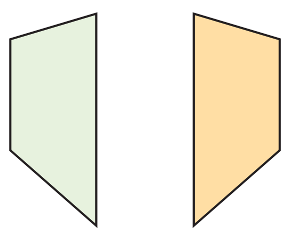
4. Kaphattuk-e tengelyes tükrözéssel az egyik síkidomból a másikat? Válaszodat másolópapírral ellenőrizd!

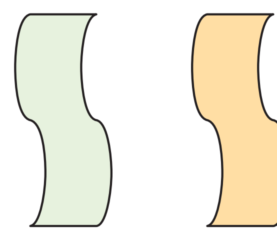
a)


b)


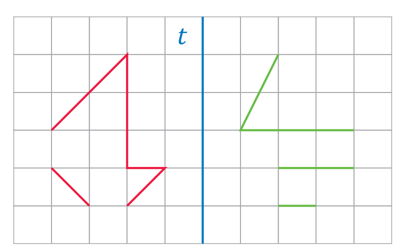
c)


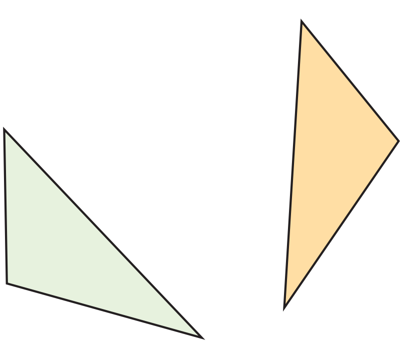
d)


e)


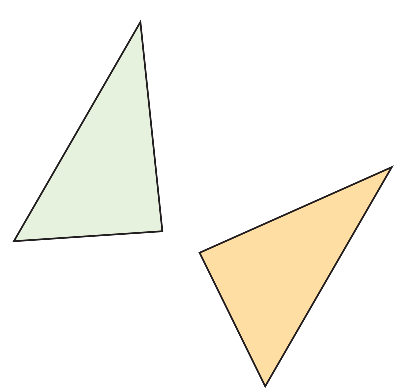
f)


5. A négyzethálón egy alakzat részletét látod. A hiányzó résznek megadtuk a tengelyes tükörképét. Másold át a füzetedbe, és rajzold meg a teljes ábrát!





6. Az ábrán látható két háromszög egymás tükörképe. Hogyan tudod megszerkeszteni a tengelyt, ha csak vonalzód van?



7. Az ábrán látható két háromszög egymás tükörképe. Hogyan tudod megszerkeszteni a tengely két pontját, ha csak körződ van?

8. TENGELYES SZIMMETRIA

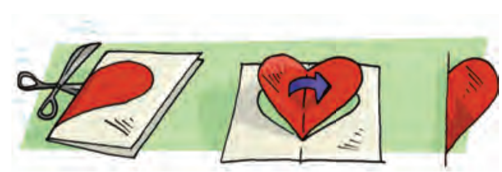
Mi van ráírva? Nézzétek meg a képet egy tükörben! Beszéljétek meg, hogy miért így feliratozták az autót! Hol láthatunk még ilyet?

Játék

Alkossatok párokat, és álljatok fel egymással szemben úgy, hogy szabadon tudjatok mozogni! Egy percig az egyikőtök végezzen szép lassú mozdulatokat, a párja pedig úgy mozduljon, mintha ő lenne a tükörképe! Például ha az egyik gyerek a bal karját emeli fel, akkor a másiknak a jobbat kell. Egy perc elteltével cseréljetek szerepet!

A játéknak sokféle variációja van. Úgy is játszhatjátok, hogy egy ember kiáll középre a többiekkel szemben, ő lesz az, aki a lassú mozdulatokat végzi. A csoport többi tagja utánozza, de mindenki tükörképszerűen mozdul meg. Ha valaki eltéveszti, kiesik.

Egy írólapot hajts pontosan ketté, majd a hajtásvonalnál vágj ki egy alakzatot! Ezután nyisd ki a papírlapot, nézd meg a kivágott részt és a papírlapon keletkezett lyukat is!



Figyeld meg! A hajtásvonal mentén a papír és a kivágott alakzat is úgy hajtható félbe, hogy a két rész tökéletesen fedi egymást.
Rajzolj még ilyen alakzatokat az írólapodra! Kivágás után félbehajtva ellenőrizheted, hogy jót rajzoltál-e.
A következő ábrán is ilyen félbehajtható alakzatokat látunk, és bejelöltünk egy-egy jó hajtásvonalat is.

Van-e az ábrán látható alakzatok között olyan, amelyiket nem csak egy vonal mentén tudnál félbehajtani?

A negyedik alakzatra be tudtunk rajzolni egy másik lehetséges hajtásvonalat is. Ezek a hajtásvonalak mindegyik esetben egy tengelyes tükrözés tengelyei lesznek. Ha végrehajtanánk a tengelyes tükrözést, akkor ezek az alakzatok nem változnának.

Ha egy alakzathoz található olyan tengelyes tükrözés, amely önmagába viszi, akkor az alakzatot **tengelyesen tükrös**nek vagy **tengelyesen szimmetrikus**nak mondjuk.
Az ábráinkon látható hajtásvonalak a tükörtengelyek.
Láttuk, hogy egy alakzatnak több tengelye is lehet.

Az ember által készített, épített környezetben nagyon sok tengelyes szimmetriát láthatunk, de a természetben is megfigyelhetjük a szimmetriát.



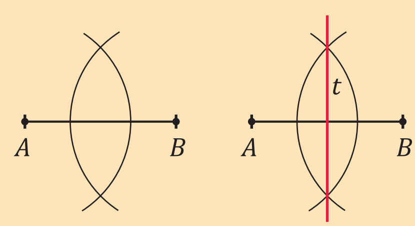
A környezetünkben található szimmetrikus tárgyak, élőlények valójában síkra tükrösek. Mi most csak síkban, tengelyre nézve vizsgáltuk a szimmetriát. Ezért a mellékelt fényképeket nem térbeli alakzatként, hanem képként kell szemlélnünk.
A szimmetria arányosságot, kiegyensúlyozottságot sugároz. Megfigyelhető, hogy a szépség kapcsolatban állhat a szimmetriával.
Térben a testek is lehetnek szimmetrikusak. A síkbeli alakzatoknak tükörtengelyük, a testeknek tükörsíkjuk lehet.

1. példa

Szerkesszük meg egy adott szakasz rá merőleges szimmetriatengelyét!

Megoldás

Tudjuk, hogy a tengelyes tükrözésnél a sík minden P pontja és annak P' képe által meghatározott szakasznak a tengely a szakaszfelező merőlegese, ha P nem illeszkedik a tengelyre. Így az adott szakasz **felezőmerőleges**ét kell megszerkesztenünk. Az itt látható két ábrával felelevenítjük ezt a szerkesztést. Az AB szakasz szimmetriatengelye a t egyenes.



Mivel a szakaszfelező merőleges a szakasz szimmetriatengelye, ezért minden pontja egyenlő távolságra van a szakasz két végpontjától.

Csoportmunka

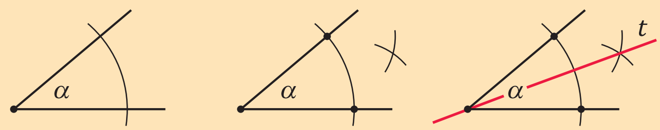
Vannak olyan szavak, amelyekben a betűk tükrösen helyezkednek el.
Nem geometriai tükrözésről van szó, csak a tükörképnél ugyanazt a betűt írjuk: Anna, apa… .
Készíthetünk ilyen tulajdonságú mondatokat is: Géza, kék az ég! (A kis- és nagybetűket ne vegyük különbözőnek, az írásjelektől is tekintsünk el!)
Ezek a palindrom szavak, palindrom mondatok.
Alkossatok négyfős csoportokat, és gyűjtsetek 1 perc alatt minél több palindrom szót! Minden szó annyi pontot ér, ahány betűből áll.

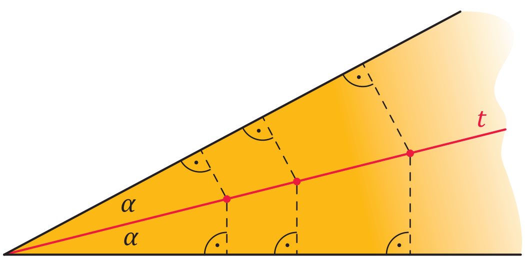
2. példa

Szerkesszük meg egy adott szög szimmetriatengelyét!

Megoldás

Már tudjuk, hogy a tengelyt metsző egyenes és képe által meghatározott szögnek a tengely a szögfelezője. Ezért az adott szög **szögfelező egyenes**ét kell megszerkesztenünk. Az ábrasorozat mutatja a szerkesztés lépéseit. Az adott szög szimmetriatengelye a *t* egyenes.





Mivel a szögfelező a szög szimmetriatengelye, ezért minden pontja egyenlő távolságra van a szög két szárától. A szimmetriatengelynek a szögtartományba eső félegyenese két egyenlő szögtartományra vágja szét az eredeti szöget.

Kutatómunka

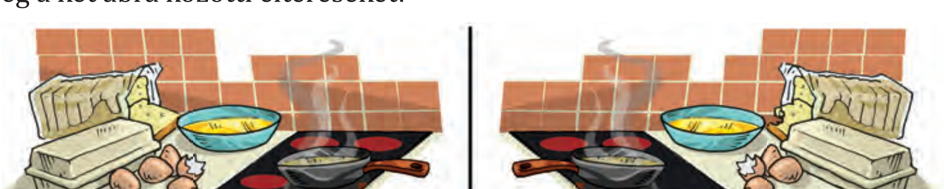
Írjatok össze olyan tárgyakat amelyekben tükör van, illetve olyan foglalkozásokat, ahol tükröt használnak.

Feladatok

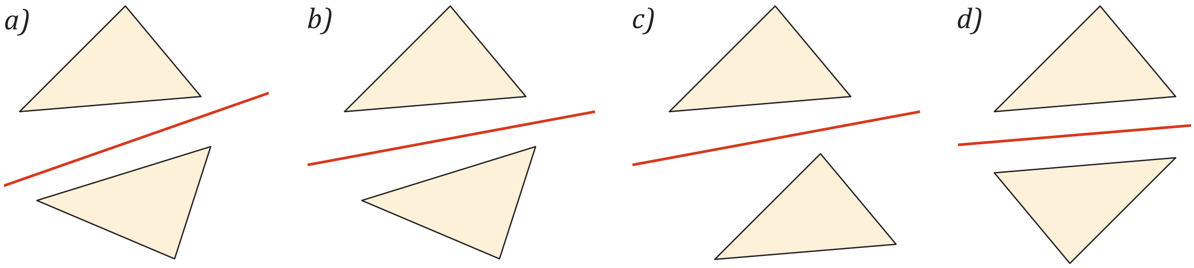
1. A következő alakzatok közül melyek azok, amelyeken nem lehet észrevenni, ha tükrözzük őket egy megfelelő tengelyre?

2. Add meg azokat a nyomtatott nagybetűket, amelyek a tükörben nem változnak meg!

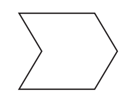
3. A két kép tengelyes tükörképe egymásnak. A rajzoló sajnos öt hibát vétett rajzolás közben. Keresd meg a két ábra közötti eltéréseket!



4. Az ábrákon két háromszög és egy egyenes látható. Melyik ábráról mondhatjuk, hogy az egyik háromszöget az egyenesre tükrözve a másik háromszöget kapjuk?



5. Rajzold le a füzetedbe a következő alakzatot, majd tengelyes tükrözések egymásutánjával készíts sormintát!

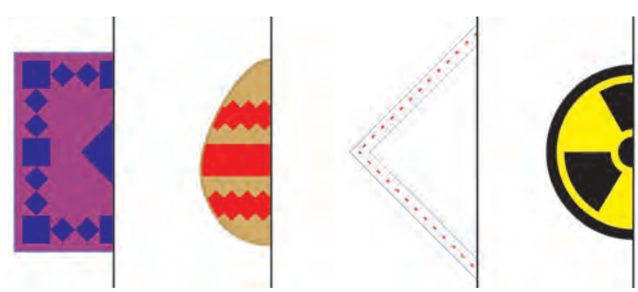


a) Melyek azok az ábrák, amelyek ugyanúgy állnak, mint az első?
b) Melyek azok az ábrák, amelyek tükörképei az elsőnek? Hová kell tenni a tengelyt?

6. *a)* Melyek azok a digitális számjegyek, amelyeket úgy tudsz lerajzolni, hogy legyen szimmetriatengelyük?
b) Készíts olyan többjegyű számot ezekkel a számjegyekkel, amelynek van szimmetriatengelye!

7. *a)* Melyek azok a nyomtatott nagybetűk, amelyeket úgy tudsz lerajzolni, hogy legyen szimmetriatengelyük?
b) Írj nyomtatott nagybetűkkel olyan szavakat, amelyeknek van szimmetriatengelyük!

8. Az emberek ősidők óta használják a tükrözést. Megfigyelhetjük ékszerek, edények, bútorok készítésénél, díszítésénél. Átlátszó papír segítségével készítsd el a füzetedben az ábrák másik felét is, hogy tengelyesen tükrösek legyenek!



9. Egy egyenes út mellett a mezőn két fa látható. Készíts egy térképvázlatot! Hogyan lehetne az útnak azt a pontját megtalálni a vázlatodon, amelytől mindkét fa egyenlő távolságra van?

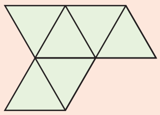
10. Rajzolj két párhuzamos egyenest! Rajzold meg pirossal az ábra szimmetriatengelyét!

11. Keresd meg a képen a csempék vagy csempecsoportok szimmetriatengelyeit! Ha nehéz döntened, egy tükör segíthet.

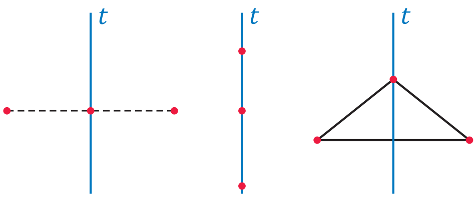
9. TENGELYESEN SZIMMETRIKUS HÁROMSZÖGEK, NÉGYSZÖGEK, SOKSZÖGEK

Tervezz! Alkoss!

Vágj ki hat egyforma szabályos háromszöglapot kartonpapírból! Tervezz minél több síkidomot, amelyeket a hat háromszögből raksz össze! Ezeket rajzold le a füzetedbe! Mindig teljes oldalaknak kell illeszkedniük egymáshoz. Az így kapott síkidomokat el is nevezheted, ha emlékeztetnek valamire.
Egyet mi is építettünk. Ezt mi pisztolynak nevezzük!



A háromszögeket már csoportosítottuk a szögeik és az oldalaik alapján. Most szimmetriájuk alapján fogjuk vizsgálni őket.
Három pont szimmetrikus helyzetei:
- A három pont egy egyenesen van, és közülük pontosan egy illeszkedik a tengelyre (1.)
- A három pont illeszkedik a tengelyre (2.)
- A három pont nincs egy egyenesen, és közülük pontosan egy illeszkedik a tengelyre (3.)



Ha a három pont nincs egy egyenesen és szimmetrikus helyzetű, akkor ezeket összekötve **tengelyesen szimmetrikus háromszög**et, vagyis **tengelyesen tükrös háromszög**et kapunk.

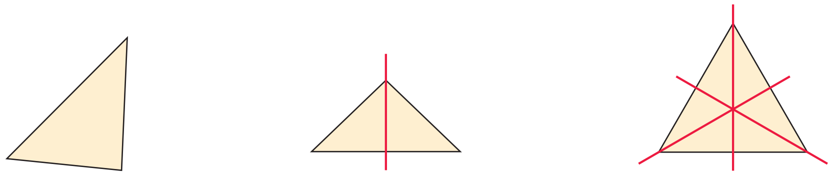
Az eddigi ismereteink alapján: *a)* Ha egy háromszög szimmetrikus, akkor van két egyenlő hosszú oldala (azaz egyenlő szárú). *b)* Ha egy háromszög egyenlő szárú, akkor szimmetrikus.

Kiemeljük a mondatok lényegét: **Ha** szimmetrikus, **akkor** egyenlő szárú.
Ha egyenlő szárú, **akkor** szimmetrikus.

Egy háromszög pontosan akkor szimmetrikus, ha egyenlő szárú.

Az egyenlő oldalú háromszögeknek három szimmetriatengelye van.
A háromszögeket csoportosíthatjuk a szimmetriatengelyek száma szerint:
– nincs tengelye; – egy tengelye van; – három tengelye van.

Gondolkodjatok el azon, miért nem lehet pontosan két szimmetriatengelye egy háromszögnek!



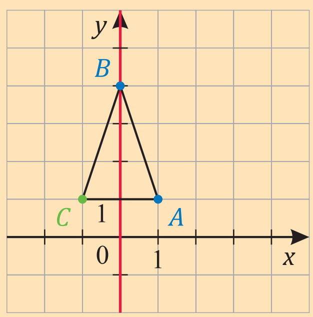
1. példa

Szimmetrikus háromszöget szeretnénk rajzolni a koordináta-rendszerben. A háromszög két csúcsa: $A(1; 1)$, $B(0; 4)$. Adjuk meg a C csúcs koordinátáit, ha a háromszög szimmetriatengelye az

a) y tengely; *b)* y tengellyel párhuzamos egyenes;
c) x tengellyel párhuzamos egyenes; *d)* első negyed szögfelezője!

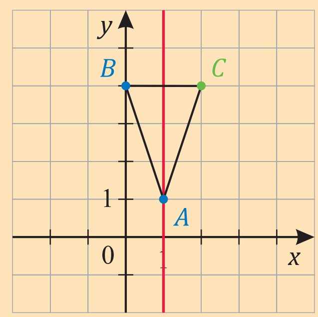
Megoldás

a)



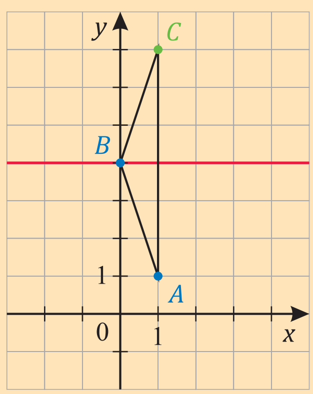
A harmadik csúcs: $C(-1; 1)$.

b)



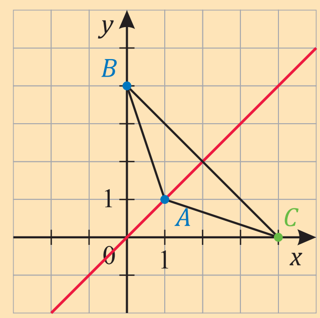
A harmadik csúcs: $C(2; 4)$.

c)



A harmadik csúcs: $C(1; 7)$.

d)



A harmadik csúcs: $C(4; 0)$.

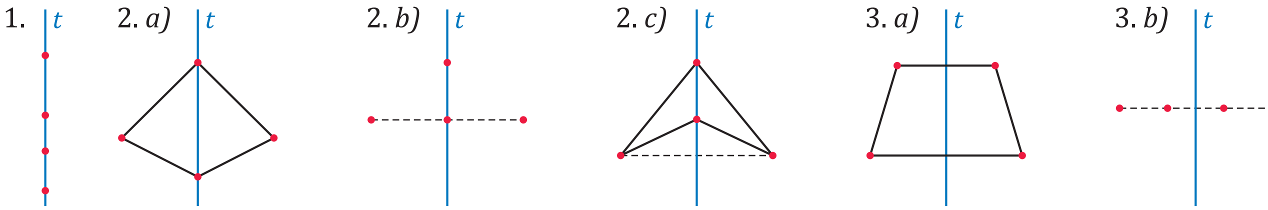
PÁROS MUNKA

Rajzoljatok közösen szimmetrikus háromszöget! Húzzatok egy egyenest, ez lesz a tükörtengely! Egyikőtök csak az egyik, másikótok csak a másik oldalára rajzolhat a tengelynek. Végül egy tükrös háromszöget kell kapnotok. Először rajzoljatok egymást váltogatva egy-egy háromszöget, aztán próbáljátok meg úgy is, hogy egyszerre rajzoltok!

Játszhatjátok ugyanezt a játékot úgy is, hogy szimmetrikus négyszögnek kell keletkeznie.

9. TENGELYESEN SZIMMETRIKUS HÁROMSZÖGEK, NÉGYSZÖGEK, SOKSZÖGEK

Vizsgáljuk meg négy pont szimmetrikus helyzeteit!
1. A négy pont a tengelyre illeszkedik.
2. Két pont illeszkedik a tengelyre, a további kettő egymás tükörképe.
3. Egyik pont sem illeszkedik a tengelyre, kettő-kettő egymás tükörképe.



Ha a négy pont közül semelyik három nincs egy egyenesen és szimmetrikus helyzetűek, akkor a négy pontot összekötve **tengelyesen szimmetrikus négyszög**et, vagyis **tengelyesen tükrös négyszög**et kapunk. Deltoidot kapunk, ha két pont illeszkedik a tengelyre (*2. a)* és *2. c) ábra*).
Ha egyik pont sem illeszkedik a tengelyre, akkor trapézt kapunk. Ezt a trapézt nevezzük szimmetrikus trapéznak (*3. a) ábra*).

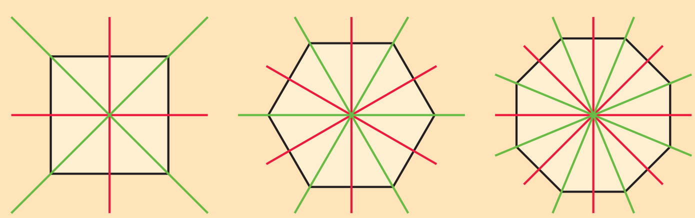
A szabályos sokszögeknek nem csak egy szimmetriatengelyük van.

2. példa

Rajzoljuk meg a szabályos négyszög, hatszög, nyolcszög szimmetriatengelyeit! Adjuk meg a tengelyek számát!

Megoldás

Két szemközti csúcsot összekötő egyenes és két szemközti oldal közös szakaszfelező merőlegese is szimmetriatengelye lesz a sokszögnek.
A páros oldalszámú sokszögek esetén a szimmetriatengelyek száma a sokszög oldalainak a számával egyenlő.

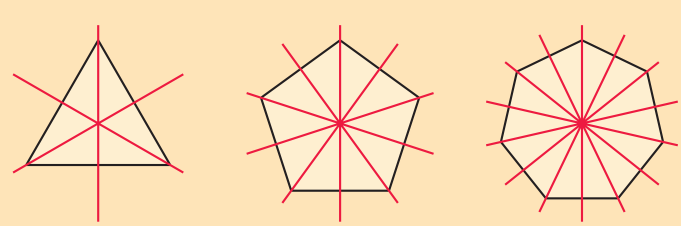


3. példa

Rajzoljuk meg a szabályos háromszög, ötszög, hétszög szimmetriatengelyeit! Adjuk meg a tengelyek számát!

Megoldás

A sokszögek tetszőleges csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő egyenes szimmetriatengelye lesz a sokszögnek.
Páratlan oldalszámú sokszögek esetén is egyenlő a szimmetriatengelyek száma a sokszög oldalainak a számával.

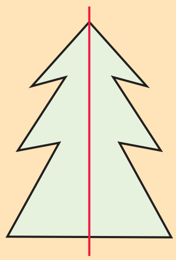


A sokszögek között is vannak tengelyesen szimmetrikusak.

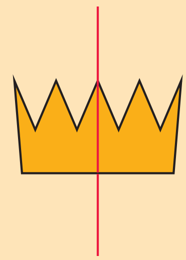
4. példa

Rajzoljunk néhány tengelyesen szimmetrikus sokszöget a tengelyével! Az ábrák lehetőleg szemléltessenek valamilyen hétköznapi dolgot!

Megoldás



fenyőfa



korona

négyágú csillag

Játék

Keressetek 1 perc alatt a koordináta-rendszerben olyan C rácspontokat, amelyek az $A(1; 4)$ és a $B(4; 2)$ pontokkal szimmetrikus háromszöget alkotnak! Az idő leteltekor sorban egyesével olvassátok fel a talált pontok koordinátáit! Amit többen is írtak, azt a pontot mindenki áthúzza a füzetében. A győztes az lesz, akinek a legtöbb nem áthúzott pontja marad!

Feladatok

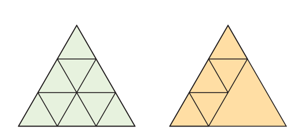
1. Egy szimmetrikus háromszög egyik oldalának hossza 4 cm, a másik oldalának hossza pedig 3 cm. Mekkora lehet a háromszög harmadik oldalának hossza? Szerkeszd meg a füzetedbe!

2. Az egyenlő szárú háromszög két oldalának hossza 5 cm és 2 cm. Mekkora lehet a háromszög harmadik oldalának hossza? Szerkeszd meg a füzetedbe!

3. Megadunk a koordináta-rendszerben hat pontot: $A(1; 2)$, $B(2; 6)$, $C(4; 1)$, $D(4; -1)$, $E(7; 4)$, $F(7; -2)$. Válassz közülük hármat úgy, hogy azok egy egyenlő szárú háromszög csúcsai legyenek! Hány megfelelő ponthármast találtál?

4. Mekkorák lehetnek a szimmetrikus háromszög hiányzó szögei, ha az egyik szöge 56°-os?

5. Az ábrán látható szabályos háromszöget kilenc, illetve hat szabályos háromszögre vágtuk. Hogyan vágnál szét egy szabályos háromszöget nyolc (nem feltétlenül egyforma) szabályos háromszögre?



6. *a)* Készíts négyzetek és egy téglalap felhasználásával szimmetrikus ábrát!
b) Készíts körvonalak segítségével szimmetrikus ábrát!

7. Rajzolj olyan közlekedési táblákat, amelyek tengelyesen szimmetrikusak!

10. SZERKESZTÉSI FELADATOK

Szerkesztési feladatok megoldása során egy korábbi leckében megismert egyszerű szerkesztési lépéseket kell egymás után végrehajtani. Nézzünk néhány példát több lépést felhasználó szerkesztési feladatokra!

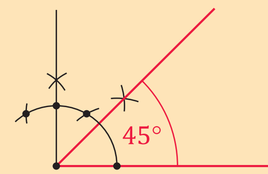
1. példa

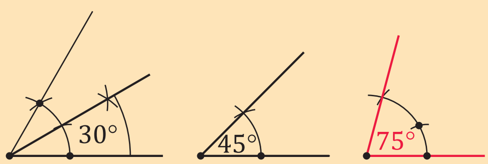
Szerkesszük meg a háromszöget, ha a *c* oldala 25 mm hosszú, és a rajta fekvő két szög 45°-os és 75°-os!

Megoldás

Adatok:

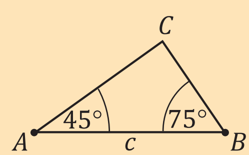
Az adatok között szerepel a 45°. Mivel 45° = 90° : 2 = (30° + 60°) : 2, ezért ezt a szöget meg tudjuk szerkeszteni. 30°-os szöget 60°-os szög felezésével kaphatunk. Egy 60°-os és egy 30°-os szög egymás mellé másolásával kapjuk a 90°-os szöget. Ha azt elfelezzük, megkapjuk a 45°-os szöget.





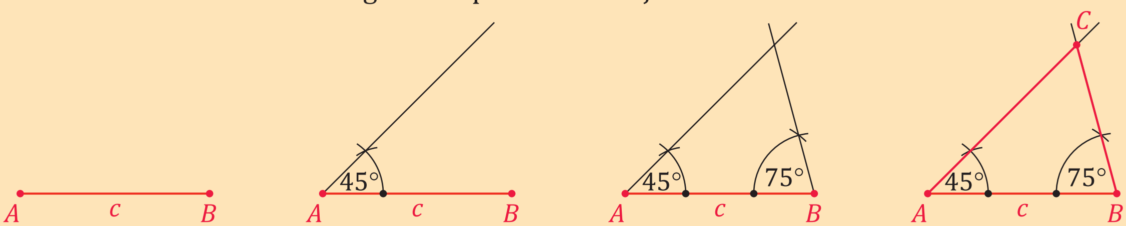
Az adatok között szerepel a 75°. Mivel 75° = 45° + 30°, ezért ezt a szöget is meg tudjuk szerkeszteni. A 45°-os és 30°-os szög szerkesztését már láttuk. A kettő egymás mellé másolásával kapjuk a 75°-os szöget.

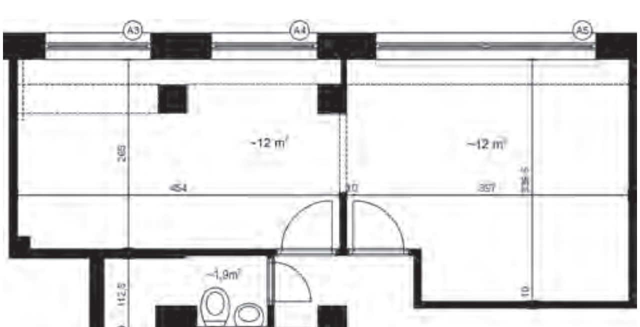
Vázlat:



Szerkesztés menete:
1. Felvesszük a *c* szakaszt, elnevezzük a végpontokat *A*-nak és *B*-nek.
2. Az *A* ponthoz másoljuk a 45°-os szöget.
3. A *B* ponthoz másoljuk a 75°-os szöget.
4. A két szögszár metszéspontját elnevezzük *C* pontnak.

Kivitelezés:
A szerkesztés menetében megadott lépéseket követjük.

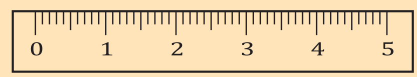


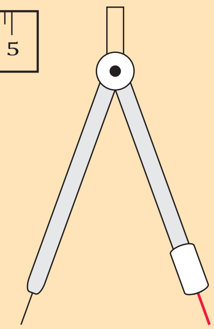


A képen egy lakás alaprajzának részlete látható. Az ilyen típusú műszaki, építészeti rajzok a valóságot modellezik. Régen papírra készültek ezek a rajzok az általunk is ismert szerkesztő eszközökkel. Ma már a műszaki rajzokat számítógéppel készítik.

2. példa

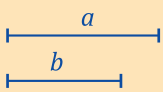
Szerkesszük meg a téglalapot, ha adott két oldala!



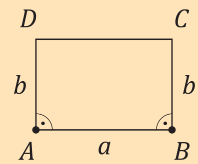


Megoldás

Adatok:



Vázlat:

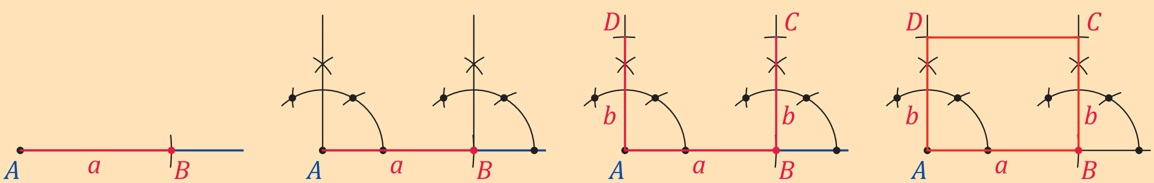


Szerkesztés menete:

1. Az *A* kezdőpontú félegyenesre másoljuk az *a* szakaszt, így megkapjuk a *B* pontot.
2. Az *AB* egyenesre az *A*-ban és a *B*-ben merőlegest szerkesztünk.
3. A *b* szakaszt rámásoljuk az így kapott mindkét egyenesre, így kapjuk a *D* és a *C* pontokat.
4. A *CD* szakasz megrajzolásával kész az *ABCD* téglalap.

Kivitelezés:

A szerkesztés menetében megadott lépéseket követjük.



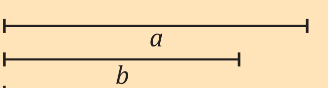
3. példa

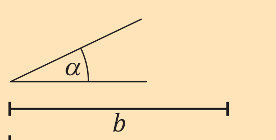
Szerkesszünk háromszöget a következő adatokból:

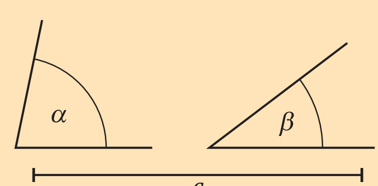
a) három oldal;

b) két oldal és a közbezárt szög;

c) egy oldal és a rajta fekvő két szög!



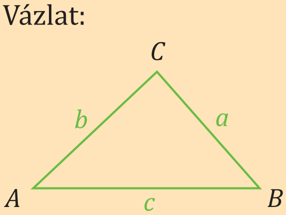




Megoldás

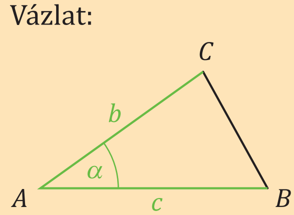
a)

Vázlat:



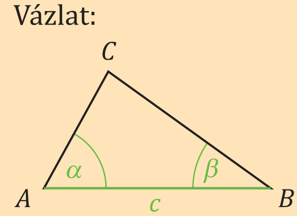
b)

Vázlat:



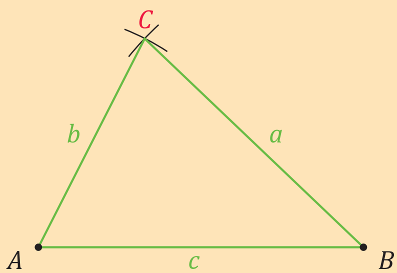
c)

Vázlat:

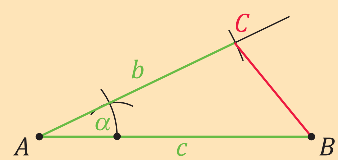


10. SZERKESZTÉSI FELADATOK

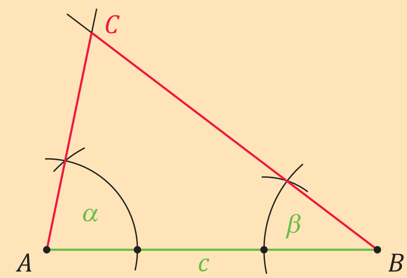
Szerkesztés:



Szerkesztés:



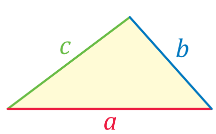
Szerkesztés:



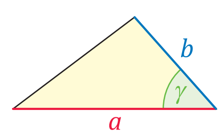
Egy háromszög megadásához három olyan adatra van szükségünk, amelyek egyértelműen meghatároznak egy háromszöget. Az oldalak és a szögek segítségével ezt többféleképpen megtehetjük.

Egy háromszöget egyértelműen meghatározza például

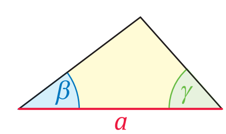
a) **három oldala;**



b) **két oldala és a közbezárt szöge;**



c) **egy oldala és a rajta fekvő két szöge.**



Ha például adott egy háromszög három oldalának a hossza, akkor ezekkel az adatokkal egyetlen háromszöget tudunk szerkeszteni. Ha egy másik háromszögnek szintén ekkorák az oldalai, akkor ez a két háromszög teljesen egyforma, egyiket a másikra tudjuk helyezni, csak helyzetükben lehet eltérés.

Kutatómunka

Fedezzétek fel az interneten a GeoGebra program szerkesztési lehetőségeit! Mutassátok be az osztálytársaitoknak, hogy mit sikerült kiderítenetek!

Feladatok

1. Rajzolj a füzetedbe egy tompaszöget! Szerkesztéssel oszd négy egyenlő részre!

2. Rajzolj egy egyenest, és végy fel rajta egy pontot! Szerkessz a pontban egy erre az egyenesre merőleges egyenest! Ezen az egyenesen is végy fel egy pontot, és ismét szerkessz a pontban erre az egyenesre is egy merőleges egyenest! Milyen helyzetű egymáshoz képest az első és a harmadik egyenes?

3. Az *a* és a *b* egyenes merőleges egymásra. Szerkessz egy *b*-től különböző merőleges egyenest *a*-ra, és szerkessz egy *a*-tól különböző merőleges egyenest *b*-re! Milyen síkidomot határoz meg a négy egyenes?

4. Az *a* és a *b* egyenes párhuzamos egymással. Szerkessz egy merőleges egyenest *a*-ra és szerkessz egy másik merőleges egyenest *b*-re! Milyen síkidomot határoz meg a négy egyenes?

5. Rajzolj a füzetedbe egy szöget három példányban! Szerkeszd meg a szög felét, negyedét és háromnegyedét!

6. Rajzolj a füzetedbe három hegyesszöget, nevezd el őket: α, β, γ! Szerkeszd meg a következő szögeket!

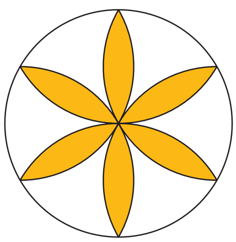
a) $\alpha + \beta + \gamma$ *b)* $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$ *c)* $\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} + \gamma$ *d)* $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \gamma$

7. Szerkeszd meg a következő szögeket!

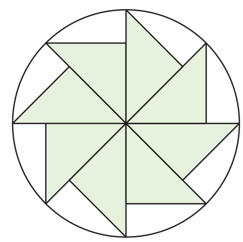
a) 30° *b)* 15° *c)* 22,5° *d)* 135° *e)* 120° *f)* 150°

8. Szerkeszd meg a következő ábrák másolatait!

a)



b)



9. Keresd meg a hamis állítást!

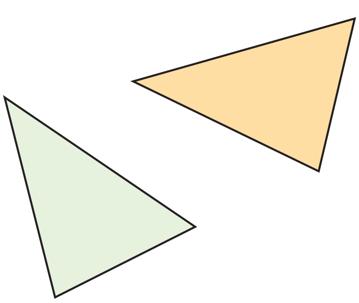
a) A háromszöget egyértelműen meghatározza három oldala.
b) A háromszöget egyértelműen meghatározza három szöge.
c) A háromszöget egyértelműen meghatározza két oldala és a közbezárt szöge.
d) A háromszöget egyértelműen meghatározza egy oldala és a rajta fekvő két szöge.

10. Két egyenlő szárú háromszög alapja egyenlő hosszúságú. Melyik adatuk egyenlősége kell még, hogy egybevágóak legyenek?

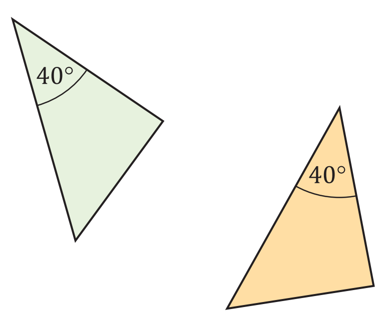
11. Egybevágó-e két derékszögű háromszög, ha a leghosszabb oldaluk hossza egyenlő, és van azonos nagyságú hegyesszögük?

12. Mérd meg az ábrán látható háromszögek oldalainak hosszát! Melyik pár egybevágó? Hány oldalpár hosszát kellett megmérned?

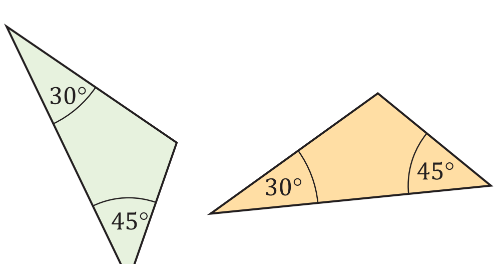
a)



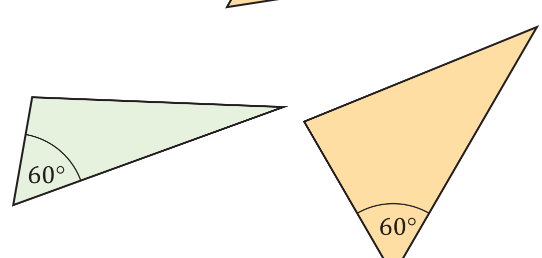
b)



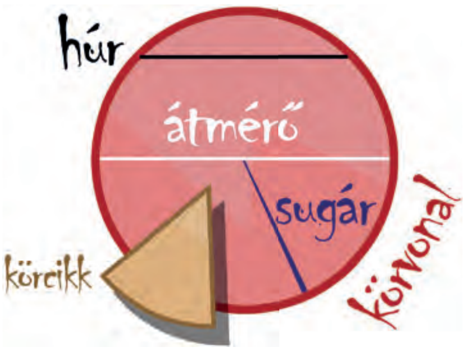
c)



d)



11. ÖSSZEFOGLALÁS



Mit tanultunk ebben a fejezetben?
Síkbeli alakzatokkal foglalkoztunk. A **szög mérése** és a szögekkel kapcsolatos fogalmak szükségesek a geometriai szövegek megértéséhez. A **kör**rel kapcsolatos fogalmakat sem felejthetjük el. A matematikai szövegek megértéséhez a következő fogalmak hasznosak: **sugár, átmérő, húr, körív, körcikk.** Megismerkedtünk egy fontos fogalommal, az **egybevágóság**gal, majd ezt követően a **tengelyes tükrözés**sel. Megvizsgáltuk a tulajdonságait, és megfigyeltük a minket körülvevő világban a **tengelyes szimmetriát.**

PÁROS MUNKA

A következő kérdésekkel és válaszokkal röviden összefoglaljuk a legfontosabbakat a fejezetből. Olvassátok el, majd a padtársak 5-5 kérdés választásával szóban vizsgáztathatják egymást.

1. Hogyan csoportosítjuk a háromszögeket a legnagyobb szögeik alapján?
   Hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű háromszögek.
2. Hogyan csoportosítjuk a háromszögeket az oldalaik alapján?
   Általános háromszögek, egyenlő szárú háromszögek és egyenlő oldalú (vagy szabályos) háromszögek.
3. Mekkora a váltószám a fok és a szögperc között?
   1 fok 60 szögperccel egyenlő.
4. Szögek szempontjából milyen típusú az a háromszög, amelyiknek van egy 24°-os és egy 36°-os szöge?
   A háromszög szögeinek az összege 180°. Ezért ebben a háromszögben a hiányzó szög nagysága: $180° - 24° - 36° = 120°$. Vagyis tompaszögű háromszögről van szó.
5. Milyen adatok határozzák meg egyértelműen a háromszöget?
   Három oldala;
   két oldala és a közbezárt szöge;
   egy oldala és a rajta fekvő két szöge.
6. Soroljuk fel a tengelyes tükrözés néhány tulajdonságát!
   Egyenestartó, körtartó, távolságtartó, szögtartó.
   A tengellyel párhuzamos egyenes tükörképe is párhuzamos a tengellyel.
   A tengelyt metsző egyenes és képe a tengelyen metszik egymást.
   A tengelyre merőleges egyenes képe önmaga.
7. Lehet-e egy háromszögnek pontosan két szimmetriatengelye?
   Az egyenlő szárú háromszögeknek egy, az egyenlő oldalú háromszögeknek pedig három szimmetriatengelyük van. Pontosan két szimmetriatengelye nem lehet egy háromszögnek.
8. Hány szimmetriatengelye van a szabályos hatszögnek és a szabályos hétszögnek?
   Minden szabályos sokszögben a szimmetriatengelyek száma a sokszög oldalainak a számával egyenlő, ezért a szabályos hatszögben 6, a szabályos hétszögben 7 szimmetriatengely van.

Tesztfeladatok

A következő öt feladat mindegyikében csak egy helyes válasz van!

1. A következő állításokat háromszögekről fogalmaztuk meg. Jelöld be a helyes választ!
A: Létezik olyan háromszög, amelyiknek két tompaszöge van.
B: Egyenlő szárú háromszög csak a hegyesszögű háromszögek között található.
C: Létezik olyan derékszögű háromszög, amelyikben a derékszögnél nagyobb és kisebb szög is van.
D: Minden háromszögben van legalább két hegyesszög.
E: Ha egy háromszögben a legkisebb szög hegyesszög, akkor az biztosan hegyesszögű háromszög.

2. Melyik mennyiséget kell kihagynunk, hogy mindegyik ugyanannyi legyen?
A: 21 600 másodperc B: negyed nap C: 6 óra
D: 36 000 másodperc E: 360 perc

3. Add meg a háromszög hiányzó szögét: 42° 30’, 58° 30’, ...!
A: 101° B: 100° C: 80° D: 79° E: 60°

4. A tengelyes tükrözés néhány tulajdonságát soroltuk fel. Melyik hibás?
A: A tengellyel párhuzamos egyenes tükörképe is párhuzamos a tengellyel.
B: A tengelyt metsző egyenes és képe a tengelyen metszik egymást.
C: A tengelyre merőleges egyenes képe párhuzamos a tengellyel.
D: Ha egy kör érinti a tengelyt, akkor a képe ugyanott érinti a tengelyt.
E: Ha egy kör metszi a tengelyt, akkor a képe ugyanott metszi a tengelyt.

5. Egy négyszögben a szimmetriatengelyek száma nem lehet
A: 0 B: 1 C: 2 D: 3 E: 4.

Feladatok

1. Emőke hétfőn délelőtt 14 km-t, délután 18 km-t utazott, kedden pedig összesen másfélszer annyit, mint az előző napon. Szerdán a hétfő délutáni távolságnak a kétharmadát tette meg.
a) Hány kilométert utazott összesen ezen a három napon?
b) Hány méter hiányzik még ahhoz, hogy ez a távolság 100 km legyen?
c) Hányad része a szerdai táv a keddinek?
d) Igaz-e, hogy kedden a teljes távnak megtette több mint a felét?

2. Rajzolj, számolj! Mit mondhatunk az egyes háromszögekről? Mekkorák a háromszög szögei, ha
a) két belső szöge 47°-os és 43°-os;
b) egy belső szöge 47°-os, egy másik külső szöge pedig 133°-os;
c) két külső szöge is 130°-os?

3. Igaz vagy hamis?

a) Bármely két szabályos háromszög egybevágó.
b) Két derékszögű háromszög egybevágó, ha átfogóik egyenlő hosszúak.
c) Egy négyzet szögeinek összege 360°.
d) Van két olyan egybevágó háromszög, amelyekből kirakható egy téglalap.
e) Két négyzet egybevágó, ha van egyenlő hosszú oldaluk.

4. A gyerekek biciklitúrára mentek Cegléd környékére.
A térképvázlaton az Alföld egy részletét láthatod. A vázlat alapján válaszolj a kérdésekre!

a) Hányféleképpen lehet Ceglédről Kiskörére a térképen látható utakon eljutni?
b) Mérd le az egyes útvonalak hosszát!
c) Találsz-e a térképen olyan települést, amelyik Szolnokhoz légvonalban közelebb van, mint Ceglédtől Újszász?
d) Hány kilométert kell biciklizni a gyerekeknek, ha Nagykőrösről Mezőtúrra a lehető legrövidebb úton szeretnének eljutni?

5. Egy egyenlő szárú háromszögnek van 13,4 cm és 2 dm hosszúságú oldala. Hány milliméter lehet a harmadik oldal hossza?

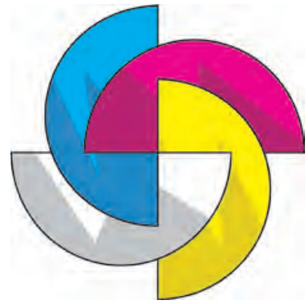
6. Döntsd el a következő egyenlő szárú háromszögekről a szögek nagysága alapján, hogy azok hegyesszögűek, derékszögűek vagy tompaszögűek? Add meg a hiányzó szögek nagyságát!

a) Az alapon fekvő szögei 38°-osak.
b) A szárak által bezárt szög 30°-os.
c) Az alapon fekvő egyik szög 9°-kal nagyobb, mint a szárak közötti szög.
d) Két szögének összege egyenlő a harmadikkal.
e) Két szögének különbsége egyenlő a harmadikkal.
f) Az alapon fekvő egyik szög 10-szeresével egyenlő a szárak közötti szög.

7. Figyeld meg az ábrák szerkezetét, majd szerkesztéssel másold át a füzetedbe őket! Tervezz te is ilyen mintákat!

a)

b)



8. Lillus és Levi is szerkesztett egy-egy háromszöget a füzetébe. Mindkét háromszögnek van 3 cm hosszúságú oldala. Lillus háromszögének van 4 cm-es, Levi háromszögének pedig 5 cm-es oldala.

a) Lehetséges-e, hogy a két háromszög nem egybevágó? Rajzzal indokold a válaszodat!

b) Elképzelhető-e, hogy a két gyerek háromszöge egybevágó? Ha igen, akkor szerkeszd meg ezt a háromszöget!

c) Add meg méréssel az előbb szerkesztett háromszög legnagyobb szögét!

d) Lillus egy szökőév augusztusában ezt mondta öccsének, Levinek: 24 óra múlva megünnepeljük a születésnapomat, és utána 5640 óra múlva a tiédet! Levi születésnapja után hány nap múlva mondhatja legközelebb Lillus ismét ugyanezt a mondatot?

9. Szerkessz háromszöget, melynek egyik oldala 8 cm hosszú, szögei pedig 30, 60 és 90°-osak! Hány olyan háromszöget lehet szerkeszteni ezekkel az adatokkal, amelyek nem egybevágók?

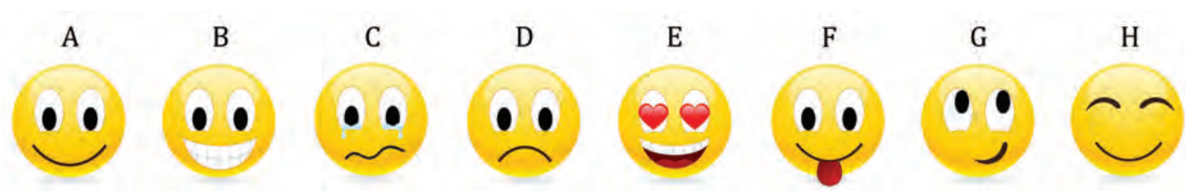
10. Szerkessz egy tetszőleges derékszögű háromszöget! Tükrözd

a) az egyik befogó egyenesére;

b) az átfogó egyenesére;

c) egy tetszőleges egyenesre, amely a háromszöget metszi!

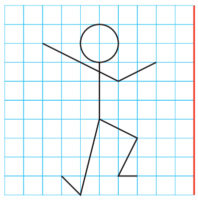
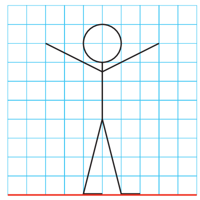
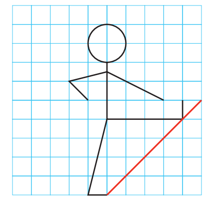
11. Válogasd két halmazba a smile-kat! Az egyik halmazba kerüljenek a tengelyesen szimmetrikusak, a másikba a nem szimmetrikusak!



12. Egy derékszögű háromszög minden oldalára kifelé szabályos háromszöget szerkesztettünk! (A szerkesztett szabályos háromszögek egyik oldala azonos a derékszögű háromszög egyik oldalával.) Lehet-e az így kapott ábra tengelyesen szimmetrikus? Ha igen, akkor szerkessz ilyet a füzetedbe! Jelöld a szimmetriatengelyt is!

13. Írd le nyomtatott betűkkel a füzetedbe a TÜKÖR szót! Legyen a T betű függőleges szára a tükrözés tengelye. Tükrözd a betűket erre a tengelyre!

14. A négyzetrácsra rajzolt pálcikaembereket másold le a füzetedbe, és rajzold meg a piros egyenesre tükrözött képüket is!

a)

b)

c)


15. Egy visszapillantó tükörben így látszik egy gépkocsi rendszámának három betűje:

A három betű után egy kötőjel és három számjegy következik.

a) Adj meg egy ilyen rendszámot!

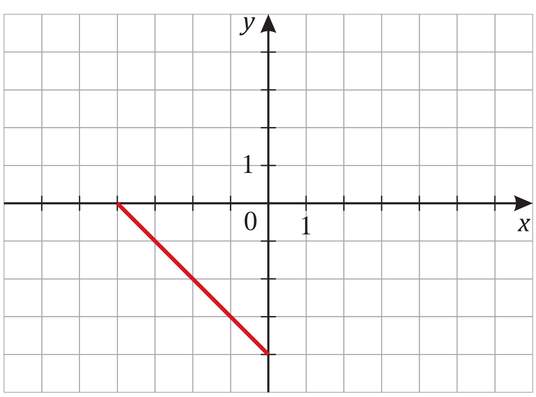
b) Hány darab ilyen rendszám van, ha tudjuk, hogy a három számjegy nem mindegyike azonos!

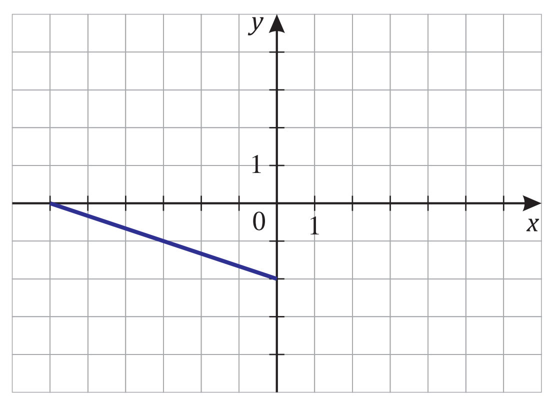
16. A gépkocsikra egyedi rendszámok is kérhetők! Rajzold le a képen látható egyedi rendszámot úgy, ahogyan egy

a) egy másik autó visszapillantó tükrében;

b) tócsában lehetne látni!

17. Másold át a koordináta-rendszereket a füzetedbe! Tükrözd a piros, illetve a kék szakaszt először az y tengelyre, majd a kapott képet az x tengelyre, és végül megint az y tengelyre! Számold ki a négy piros, illetve a négy kék szakasz által közrezárt területet!





18. Móra Ferenc *Kincskereső kisködmön* című könyvéből vettük ezt a rövid részletet:

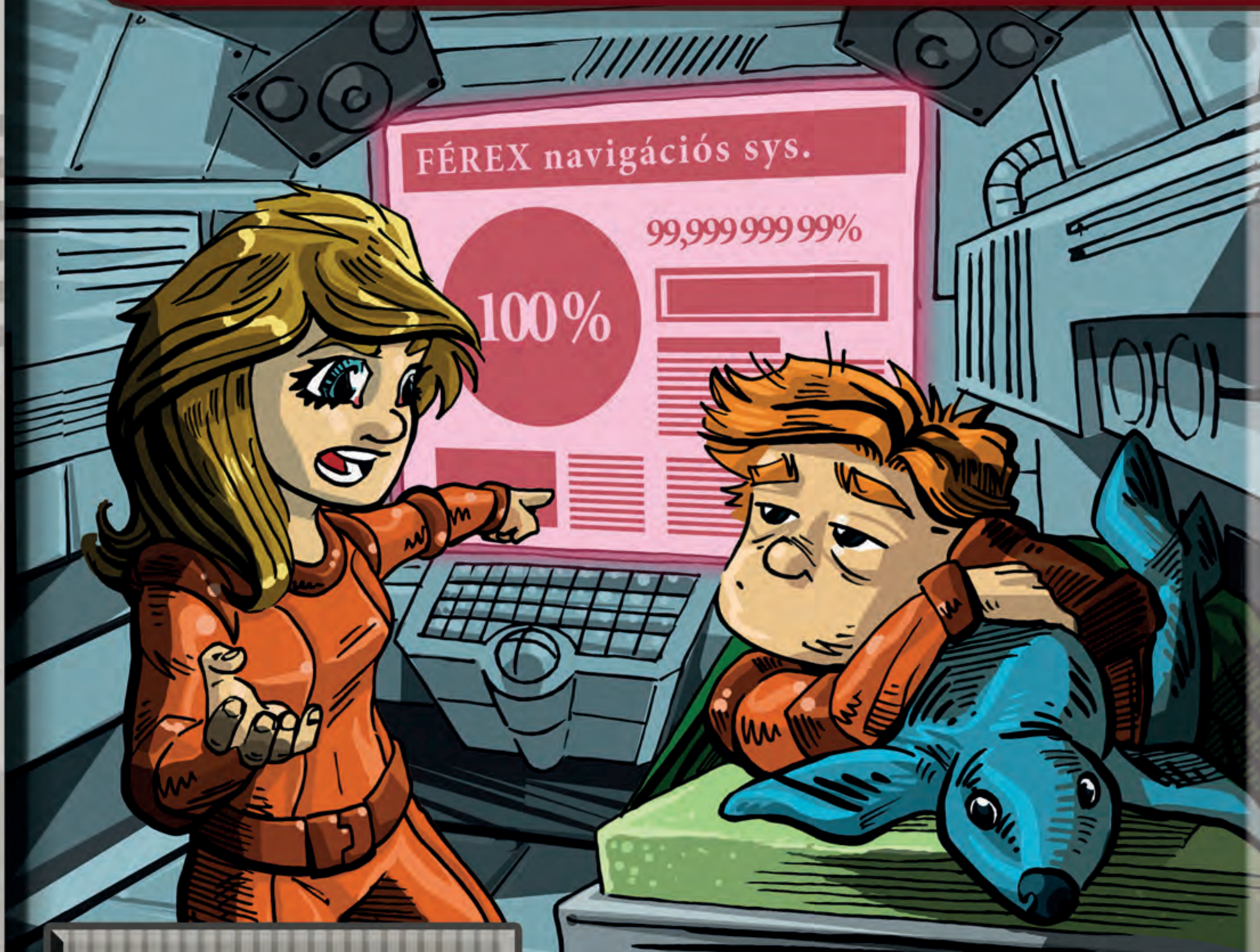
„Azon az estén ezt a szót kapartam bele a jégvirágok mezejébe:
Édesapám odaállt mögém a méccsel, hogy jobban lássa, mit dolgozom. A betűk árnyéka óriássá nyúlva vetődött ki a hóra, s úgy reszketett a mécs lobogásában, mint valami varázsírás.
– Te, az S-et megfordítva írtad – kacagott édesapám –, nézd, így kell azt írni."

a) Hogyan nézne ki a felirat, ha nem csak az S-et, hanem minden betűt „megfordítva" írtunk volna?

b) Mit jelent ebben a szövegkörnyezetben a „megfordítva" kifejezés? Magyarázd el matematikai szakszavakkal!

c) Hogyan nézne ki a KINCS szó, ha az egészet egyben tükröznénk egy függőleges, illetve egy vízszintes tengelyre?

IV. Arány, százalék, szöveges feladatok



Panni felrázta a bóbiskoló Attilát.

– Elromlott a központi számítógép – suttogta fojtott hangon, hogy a többieket fel ne riassza –, már órák óta csak azt mutatja, hogy 100% és 99,999 999 99%.

– Nem romlott el – morogta Atis a másik oldalára fordulva –, a 100% a bolygó neve, a másik a megtett út az előző start és a következő cél között.

– Miért nem kilométerben mutatja, vagy fényévekben, vagy az eltelt órákban?

– Tudja úgy is, de azt programoztam be, hogy a megtett távolság arányát mutassa százalékos formában. Majd reggel átváltom neked. Ha akarod, azt mutatja, hogy az eltelt idő az egésznek hány százaléka vagy azt, hogy az üzemanyagnak hányad részét használtuk el. Bármit meg tud mutatni… – nyögte Attila, és a fejére húzta a fóka alakú párnát.

Mikor felébredt, Panni büszkén mutatott a kijelzőre.

– Nézd, játszottam vele reggel, és én is be tudtam állítani. Most azt mutatja, hogy a teljes távolság 6289 fényév, ebből megtettük szinte az egészet, és már csak az út 0,000 000 01 része van hátra.

– Ügyes vagy! – mondta Attila, kidörzsölve a maradék álmot a szeméből. – Az a jó a FérExben, hogy az út nagy részét szinte egy pillanat alatt tesszük meg, aztán a megközelítés vesz el még egy kicsi időt.

1. AZ ARÁNY FOGALMA

PÁROS MUNKA

Mit jelenthetnek az alábbi mondatok? Beszéljétek meg!

Arányos testalkata van.
A munka végén arányosan osztották el a fizetségüket.
A tervrajzon jól láthatóak az épület arányai.
Arányaiban ma több a fiatal lakásvásárló, mint a válság előtt.
Leonardo da Vinci számos grafikai munkáján mutatja be, és festészetről szóló könyvében részletesen leírja az emberi test arányait és mozdulatait.

1. példa

Számítsuk ki a képen látható magyar nemzeti zászló piros színű területének és az egész zászló területének hányadosát! A számoláshoz szükséges adatokat mérjük meg!

Megoldás

A 3 cm-szer 6 cm-es téglalapba rajzolt magyar zászló mindhárom színének területe 6 cm^2.

A piros terület és az egész zászló 18 cm^2-es területének hányadosa $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$. Ugyanígy 1 : 3 a fehér rész és a zászló területének aránya, valamint a zöld rész és a zászló területének aránya is.

A kapott hányados a két terület aránya.
Ez a hányados bármilyen méretű magyar zászlóban ugyanennyi. Mondhatjuk úgy is, hogy:
– a piros és az egész zászló területének aránya **egy a háromhoz,**
– **egy aránylik a háromhoz,**
– a zászló területének egyharmada piros,
– a zászló területének egyharmadszorosa piros.
Ezt az arányt így jelöljük: 1 : 3.
Az **„egyharmada”**, vagy **„harmada”** ugyanazt jelenti, mint az **„egyharmadszorosa”**.
(A magyar zászló rövidebb és hosszabb oldalának aránya 1 : 2, ezért helyeztük egy 3 cm × 6 cm-es téglalapba.)

2. példa

Számítsuk ki a képen látható lett nemzeti zászló különböző színű területeinek egymáshoz és az egész zászló területéhez való arányát! Az 1 m-szer 2 m-es zászlón középen egy 20 cm-es fehér csík látható.

Megoldás

A fehér csík területe: 2 dm · 20 dm = 40 dm^2.
A két piros csík területe: 2 · 4 dm · 20 dm = 160 dm^2.
A zászló teljes területe: 10 dm · 20 dm = 200 dm^2.
A fehér csík és a zászló területének aránya: $\frac{40}{200} = \frac{1}{5}$, vagy 1 : 5.

A két piros csík és a zászló területének aránya: $\frac{160}{200} = \frac{4}{5}$, vagy 4 : 5.

A fehér és a piros terület aránya $\frac{40}{160} = \frac{1}{4}$, vagy 1 : 4.

A területek arányát a téglalapok rövidebb oldalainak arányával is megadhatjuk.

Figyeljetek arra, hogy arányok felírásakor a számok sorrendje nem cserélhető fel.
Például: $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$, 2 : 3 ≠ 3 : 2 és $\frac{1}{5} \neq \frac{5}{1}$, 1 : 5 ≠ 5 : 1.

Két szám (vagy mennyiség) aránya a két szám hányadosa. Azt fejezi ki, hogy az első szám hányad része (hányszorosa) a másodiknak.

Megadása történhet arányként (3 : 2), hányadosként $\left(\frac{3}{2}\right)$ vagy tizedes tört alakban is (1,5).

Például: Az 1,5 és a 4 aránya: $\frac{1{,}5}{4} = \frac{3}{8} = 3 : 8 = 0{,}375$. A 6 és a 9 aránya: $\frac{6}{9} = \frac{2}{3} = 2 : 3 = 0{,}\dot{6}$.

A könnyebb érthetőség kedvéért általában arra törekszünk, hogy az arányt egész számok hányadosaként, egyszerűsített tört alakban adjuk meg.
Az arány **két szám vagy mennyiség összehasonlításából** állapítható meg. Jól mutatja az összehasonlítható számok vagy mennyiségek egymáshoz való viszonyát. Az arány egyik szinonimája a viszonyszám.

3. példa

Az iskolai focibajnokság első három helyezettjének nyári táborozásához az iskola 60 ezer forinttal járul hozzá. Hogyan oszthatjuk el a nyereményt a három osztály között?

Megoldás

Többféle elosztás lehetséges, megadunk néhányat példának:

	1. helyezett	2. helyezett	3. helyezett	A nyeremények aránya
I. elosztás	30 ezer Ft	20 ezer Ft	10 ezer Ft	3 : 2 : 1
II. elosztás	20 ezer Ft	20 ezer Ft	20 ezer Ft	1 : 1 : 1
III. elosztás	45 ezer Ft	10 ezer Ft	5 ezer Ft	9 : 2 : 1
IV. elosztás	30 ezer Ft	15 ezer Ft	15 ezer Ft	2 : 1 : 1

A különböző elosztások könnyebben összehasonlíthatók, ha az arányokat nézzük.
Ha az osztályotok lenne a győztes, akkor melyik elosztást választanád?
Legkedvezőbb a nyertes számára a III. elosztás, mert ekkor jut neki a legtöbb nyeremény.
45 000 : 10 000 : 5000 = 9 : 2 : 1.
A 3. helyezettnek érdemes a II. elosztást választania, mert ebben az esetben jár a legjobban.
Három szám vagy mennyiség arányát nem írjuk fel tört alakban.

Játék

Készítsetek egymásról mobiltelefonotokkal „torzképeket” úgy, hogy a fej és a test hosszának aránya *a)* 1 : 2 *b)* 1 : 10 legyen!

Feladatok

1. Írj három különböző mondatot, amikben szerepel az arány, aránylag, aránytalan szó!

2. Add meg egyszerűsített tört alakban és arányként is a következő számok arányát!

a) 12 és 1 *b)* 20 és 2 *c)* 40 és 400 *d)* 36 és 8 *e)* 144 és 60

3. Add meg két egész szám hányadosaként, tovább nem egyszerűsíthető tört alakban és arányként is a következő számok arányát!

a) 1,2 és 0,1 *b)* 1,2 és 0,2 *c)* 0,12 és 3 *d)* 12 és 0,4 *e)* 12 és 50 *f)* 1,8 és 3,2

g) $\frac{2}{3}$ és $\frac{5}{6}$ *h)* $\frac{2}{7}$ és $\frac{4}{21}$ *i)* $\frac{2}{7}$ és 1,2 *j)* $\frac{3}{8}$ és $\frac{1}{2}$ *k)* 1,25 és $\frac{3}{4}$ *l)* $\frac{3}{7}$ és $\frac{5}{13}$

4. Egy szörpkészítményben a bodzasűrítmény mennyisége 2 dl. Ezt hígítják 8 dl vízzel.

a) Határozd meg a sűrítmény és a víz arányát!
b) Az összekevert szörp hányad része víz?
c) Mennyi a sűrítmény és az összekevert szörp aránya?

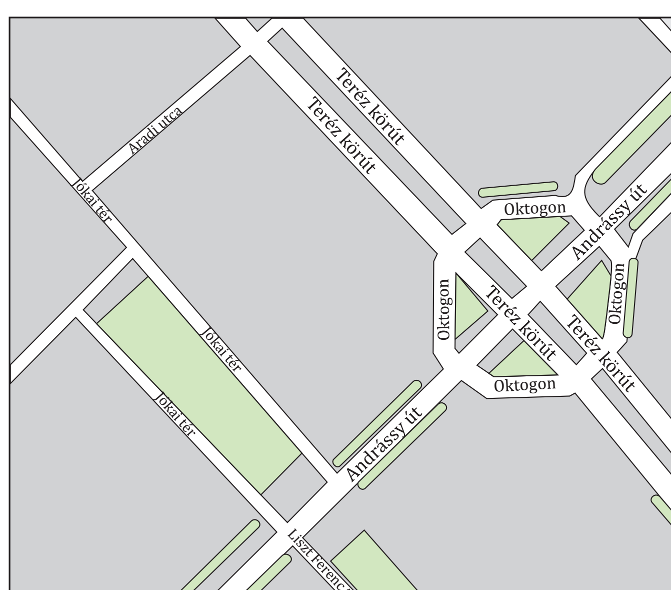
5. Három szám aránya 1 : 2 : 5. Mekkora a másik két szám, ha

a) a középső szám 12; *b)* a legnagyobb szám 100; *c)* a legkisebb szám 5?

6. Az Önkéntes Állatbarátok Szövetségének szavazatszámláló bizottsága megállapította, hogy a két elnökjelölt közül Farkas Franciska 120, Medve Mihály csak 60 szavazatot kapott. Mi volt a jelöltekre leadott szavazatok aránya?

7. Az Aradi utca és a Teréz körút sarkától 150 méterre van a Teréz körút és az Andrássy út sarka. Válaszolj az alábbi kérdésekre a térképen végzett mérések után!

a) Hány métert kellene gyalogolnunk, ha körbe szeretnénk sétálni a Jókai teret (zöld terület)?
b) Hány métert kellene gyalogolnunk az Aradi utca Jókai tér sarkától a Liszt Ferenc tér közelebbi sarkáig?
c) Nézz utána, mit jelent az oktogon szó!



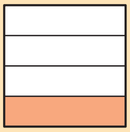
1. példa

Osszuk fel a négyzetet két részre úgy, hogy a keletkezett részek területének aránya 1 : 3 legyen!

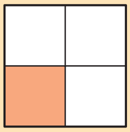
Megoldás

Összesen 4 egységre kell felosztani.

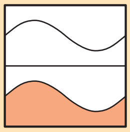
I. lehetőség
Lehet például így:



II. lehetőség
Így is feloszthatjuk:



III. lehetőség
Sőt, akár így is feloszthatjuk:



Tervezz a füzetedbe még néhány 1 : 3 arányú felosztást!

2. példa

Róbert a Tiszta Bakonyért akció keretében TeSzedd-versenyt szervezett Matyinak és Máténak. A felajánlott 10 Túró Rudi lelkesítőleg hatott. Matyi rövid idő alatt egy 3 hold, Máté pedig egy 2 hold nagyságú területet tisztított meg a kirándulók által eldobált hulladéktól. (A hold egy régi területmérték.) Milyen arányban ossza el Róbert a 10 Túró Rudit Matyi és Máté között, ha a megtisztított terület arányában akarja jutalmazni őket? Hány Túró Rudit kapott Matyi és Máté?

Megoldás

Róbert először meghatározta, hogy a 10 Túró Rudiból mennyi jut egy hold megtisztított területért.
A 10-et elosztotta a megtisztított összterület nagyságával, 5-tel. 10 : 5 = 2.
A jutalomból 1 holdra 2 Túró Rudi jut, így Matyinak 3 · 2 = 6 Túró Rudi jár, Máténak pedig 2 · 2 = 4 darab.
A Matyi és Máté által megtisztított területek aránya 3 : 2, a jutalmak aránya: 6 : 4 = 3 : 2.
A két arány megegyezik, tehát ez a módszer a jutalmat a megtisztított terület **arányában osztja** el, ez az **arányos osztás.**

3. példa

Róbert a lányokat, Pannit, Natasát és Tamarát sem hagyta ki a versenyből. Számukra egy 15 szeletes pizzát ajánlott fel.
Amíg Panni 2 holdnyi területet, addig Natasa és Tamara 4-4 hold területet tisztított meg.
A jutalmak szétosztásánál Róbert ismét alkalmazta az arányos osztást.

Megoldás

Az összes megtisztított terület 2 + 4 + 4 = 10 hold. A 15 szeletes pizzából 1 holdra 15 : 10 = 1,5 szelet jut. A másfél szelet kicsit elgondolkodtatta Róbertet, de rendületlenül számolt tovább. Panni 2 holdjára 2 · 1,5 = 3 szelet jut; Natasa és Tamara 4-4 holdjára egyenként 4 · 1,5 = 6 szelet jut.
A megtisztított területek aránya 2 : 4 : 4 = 1 : 2 : 2. A jutalmak aránya 3 : 6 : 6 = 1 : 2 : 2.
Róbert elégedetten állapította meg, hogy az arányok megegyeznek.

4. példa

Jack kapitány Péter kalóza 15 kg, Pál kalóza pedig 10 kg aranyat zsákmányolt a király vámszedőinek hajójáról. A kincset 5 kilogrammonként fadobozokba rakták. Furfangos Jennire bízták a jutalom elosztását. A kapitány 50 tallér jutalmat adott a két kalóznak, amit Jenni a dobozok számának arányában osztott szét. Hány tallér jutalmat kapott a két kalóz külön-külön?

Megoldás

Péter kalóz aranyát 3 dobozba, Pál kalózét 2 dobozba rakták. Jenni az 50 tallért elosztotta a dobozok számával, 5-tel: $50 : 5 = 10$.
A jutalomból 1 dobozra 10 tallér jutott.
Így az egyes jutalmak:

Péter kalóz $3 \cdot 10 = 30$ és Pál kalóz $2 \cdot 10 = 20$ tallér jutalmat kapott.

A két kalóz által gyűjtött kincs aránya: $15 : 10 = 3 : 2$.

A két kalóz által kapott jutalom aránya: $30 : 20 = 3 : 2$.

A két arány megegyezik, tehát Jenni a jutalmat a zsákmány **arányában osztotta** el.

5. példa

A szakácsiskola főzőversenyt rendezett, összesen 12 ezer forint jutalomért. Az első három helyen végzett tanulónak fél óra alatt minél több szilvás gombócot kellett készítenie. A jutalmat az elkészült gombócok arányában akarták szétosztani. A versenyzők által készített gombócok számát feljegyezték.
Hány forint jutalmat kaptak a versenyzők külön-külön?

Gazsi	Kata	Szilvi
90 gombóc	60 gombóc	50 gombóc

Megoldás

Az arányos osztás módszerével határozzuk meg a tanulóknak járó jutalmat.

Összesen 200 gombócot készítettek. A 12 ezer forint jutalomból 1 gombócra $\frac{12\,000 \text{ Ft}}{200} = 60$ Ft jut.
Jutalmuk:

Gazsi	Kata	Szilvi
$90 \cdot 60$ Ft = 5400 Ft	$60 \cdot 60$ Ft = 3600 Ft	$50 \cdot 60$ Ft = 3000 Ft

Számítsuk ki a gombócok számának arányát: $90 : 60 : 50 = \mathbf{9 : 6 : 5.}$
A jutalmak aránya: $5400 : 3600 : 3000 = 54 : 36 : 30 = \mathbf{9 : 6 : 5.}$
A két arány megegyezik.
A verseny végén a szurkolók megették a gombócokat.

Feladatok

1. Egy téglalap kerülete 96 cm. Oldalainak aránya 3 : 5. Számítsuk ki a téglalap oldalait és a területét!

2. Számítsuk ki azt a két számot, melyek aránya 2 : 5, és
a) az összegük 28; *b)* a különbségük 135; *c)* a szorzatuk 90!

3. Mekkora az egyes részek hossza, ha egy 24 cm hosszú szakaszt osztottunk fel a következő arányokban?
a) 1 : 5 *b)* 1 : 2 *c)* 1 : 11 *d)* 1 : 1 *e)* 1 : 3 *f)* 1 : 5 : 6 *g)* 1 : 1 : 10 *h)* 1 : 1 : 6

4. Egy iskolában a fiúk és lányok aránya 19 : 21. Az iskolában 640 diák tanul. Hány lány és hány fiú jár az iskolába?

5. A vízen úszó jég víz alatti és víz feletti részének aránya 9 : 1. Egy jéghegy víz feletti részének térfogata 20 m^3.
a) Mennyi a jéghegy víz alatti részének térfogata?
b) Hány köbméter az egész jéghegy?

6. Három szám aránya 1 : 2 : 5, összegük 80. Melyik ez a három szám?

7. *a)* Orsi, Gazsi és Matyi testvérek. Szüleik azt gondolják, hogy úgy igazságos, ha a havi zsebpénzt életkoruk arányában kapják. Orsi 18, Gazsi 16, Matyi 12 éves. Mennyi pénzt kapnak külön-külön, ha a szülők havonta összesen 32 200 Ft-ot adnak a három gyereknek?
b) Matyi fellázadt a szülői rendelkezés ellen, és azt kérte, hogy az évfolyamaiknak megfelelően kapják a zsebpénzüket. Orsi a 12., Gazsi a 10. és Matyi a 6. osztályba jár. Ki az, aki jobban járna Matyi javaslatával? Válaszodat indokold!

8. Egy kenyeret szeretnénk két olyan részre osztani, melyek aránya 2 : 1. A kenyeret 10, 12, 18 vagy 20 szeletre tudják vágni.
a) Melyik szeletelést kérjük, ha a szeletek darabolása nélkül akarjuk a kenyeret elosztani?
b) Melyik szeletelést kérjük abban az esetben, ha mindenképpen szükséges az egész szelet elosztása, de célunk a minél kevesebb darabolás?
c) Milyen legkisebb számú egész „kenyérszelettel” lehetne megoldani a 2 : 1 arányú elosztást?
Oldd meg az *a)*, *b)* és *c)* feladatokat
d) 3 : 1; *e)* 3 : 2; *f)* 5 : 1 arányú elosztás esetére is!

9. Az öreg király fiai elindulnak a vitézi tornán, mert az apjuk az ott elért győzelmeik alapján osztja szét köztük 640 km × 500 km-es, téglalap alakú uradalmát. A legnagyobb fiú 6, a középső 3, a legkisebb fiú 7 győztes csatát vívott. Az uradalom 640 km hosszú oldalát így 6 : 3 : 7 arányban osztották fel, és a hozzájuk tartozó téglalapokat kapták meg a fiúk az édesapjuktól.
a) Ki mekkora területet kapott?
b) Megegyezik a területek aránya a győztes csaták arányával? Válaszodat számolással indokold!

3. EGYENES ARÁNYOSSÁG

Az ötödik osztályban tanultak felidézésével oldjátok meg az alábbi feladatot!

PÁROS MUNKA

Döntsétek el, hogy igazak-e az alábbi állítások! Egyeztessétek válaszaitokat! Beszéljétek meg az osztállyal azokat, amelyeket nem tudtatok eldönteni!

A: Ha 1 kg narancs 400 Ft-ba kerül, akkor 4 kg narancsért 1600 Ft-ot kell fizetni.
B: Kétszer annyi idős kisbaba testhossza kétszer akkora.
C: Ha három percig folyatom a vizet fogmosásnál, akkor hatszor annyi víz folyik el, mint ha egy percig folyatnám.
D: A mosógépek kétszer annyi ruhához kétszer annyi vizet használnak.
E: Ha egyedül 4 szelet pizzát tudok megenni, akkor két barátommal együtt, hárman 12 szelet pizzát tudunk elfogyasztani.
F: Ha 5 zsemle 180 Ft-ba kerül, akkor 12 zsemle ára 432 Ft.
G: Kerékpárral fél óra alatt 8 km-t teszek meg. Feltételezve, hogy a sebességem állandó, 4 óra alatt 32 km távolságra tudok eljutni.

Egyenes arányosságról akkor beszélünk, ha az egyik mennyiség valahányszorosára változik, akkor a hozzátartozó mennyiség is ugyanannyiszorosára változik.

1. példa

Egy erdei iskola a honlapján 2550 Ft-ért hirdet szálláslehetőséget 1 éjszakára 1 főnek. Mennyibe kerül a szállás 1 éjszakára egy 5, 12, 24, 30 fős csoportnak?

Megoldás

Készítsünk táblázatot a feladat adatainak felírásához!

Személyek száma (fő)	Szállásköltség (Ft)
1	2 550
5	12 750
12	30 600
24	61 200
30	76 500

Ha kétszer annyian alszanak a szálláshelyen, kétszer annyit kell fizetni, ha ötször annyian, akkor ötször többe kerül.
Ezt aránypárokkal is felírhatjuk:

1 : 5 = 2 550 : 12 750 $\qquad \frac{1}{5} = \frac{2550}{12\,750}$

12 : 24 = 30 600 : 61 200 $\qquad \frac{12}{24} = \frac{30\,600}{61\,200}$

5 : 30 = 12 750 : 76 500 $\qquad \frac{5}{30} = \frac{12\,750}{76\,500}$

A táblázat egy sorában vannak az összetartozó mennyiségek. Számítsuk ki az összetartozó mennyiségek hányadosát!

2 550 : 1 = 2550 $\qquad$ 12 750 : 5 = 2550 $\qquad$ 30 600 : 12 = 2550
61 200 : 24 = 2550 $\qquad$ 76 500 : 30 = 2550

Az összetartozó mennyiségek hányadosa állandó. Ebben az esetben éppen az 1 főre jutó szállás árát kaptuk meg.

Az egyenesen arányos mennyiségek jellemző tulajdonsága, hogy a nullától különböző, összetartozó értékek hányadosa állandó.

2. példa

2 kg alma 840 Ft-ba kerül. Mennyit fizetnénk
a) 3 kg,
b) 4,8 kg almáért?

Megoldás

Használjuk fel, hogy az alma mennyisége és ára között egyenes arányosság van.
A megoldás során két lehetőség közül választhatunk.

I. lehetőség
Kiszámítjuk, hogy 1 kg alma mennyibe kerül: 840 : 2 = 420 Ft, és ezzel számolunk tovább.
3 kg alma $3 \cdot 420 = 1260$ Ft-ba, 4,8 kg alma $4{,}8 \cdot 420 = 2016$ Ft-ba kerül.

II. lehetőség
Felhasználjuk az egyenes arányosságnak azt a tulajdonságát, hogy ahányszorosára az egyik mennyiség változik, ugyanannyiszorosára változik a hozzátartozó mennyiség is.
A 3 kg a 2 kg-nak $\frac{3}{2}$-szerese, így az ár is $\frac{3}{2}$-szeresére változik. $840 \cdot \frac{3}{2} = 1260$ Ft.
A 4,8 kg a 2 kg-nak 2,4-szerese, ezért a fizetendő összeg is 2,4-szeresére változik. $840 \cdot 2{,}4 = 2016$ Ft.

3. példa

A fák, az erdők elengedhetetlenül szükségesek az oxigént felhasználó szervezetek számára. Nemcsak oxigént termelnek, hanem a levegőben lévő szén-dioxidot is megkötik. Egy 50 éves fa körülbelül 68,75 kg szén-dioxidot dolgoz fel egy vegetációs időszakban.

Egy 10 éves fa ennek csak $\frac{1}{12}$ részét tudja feldolgozni, mert a lombkoronája sokkal kisebb.

a) Egy erdő fái 50 évesek, az erdőben 256 db fa van.
Hány kg szén-dioxidot tud feldolgozni ez az erdő egy év alatt?
b) Az erdő fáinak felét kivágják, és helyükre 10 éves fiatal fákat ültetnek.
Hány csemetét kell ültetni ahhoz, hogy ugyanannyi szén-dioxidot tudjon feldolgozni az erdő?

Megoldás

a) A fák darabszáma és a feldolgozott szén-dioxid mennyisége egymással egyenesen arányos.
256 idős fa $256 \cdot 68{,}75 = 17\,600$ kg szén-dioxid megkötésére képes.

b) Egy 10 éves fa $68{,}75 \cdot \frac{1}{12} \approx 5{,}73$ kg szén-dioxidot tud megkötni.
128 idős fa $128 \cdot 68{,}75 = 8800$ kg szén-dioxidot dolgoz fel.
$8800 : 5{,}73 \approx 1536$ fiatal fát kell ültetni ahhoz, hogy pótolja az 50 éves fák szén-dioxid-felvételét.

Gondolkozzunk másképp:	1 db 50 éves fát	12 fiatal fa tud pótolni.
	128 db 50 éves fát	$128 \cdot 12 = 1536$ fiatal fa pótol.

Feladatok

1. Az alábbi mennyiségek közül melyek állnak egyenes arányban egymással?

a) egy ember életkora – tömege;
b) év eleje óta eltelt napok – hetek száma;
c) telefonbeszélgetés hossza – fizetendő összeg;
d) hátizsák tömege – benne lévő füzetek, könyvek száma;
e) életkor – lábméret;
f) autóval megtett út – benzin ára.

2. Egy Túró Rudi tömege 31 gramm. Mennyi a tömege a hat- és a tízdarabos kiszerelésnek?

3. Egy nyalóka 75 forintba kerül. Az ötdarabos csomagolásért 385 forintot, a hatdarabos csomagolásért 462 forintot kérnek. Hogy a leggazdaságosabb 11 darab nyalókát venni?

4. Egy befőzés alkalmával 30 kg szilvából 18 üveg szilvalekvár készült.

a) Hány üveg lekvár készülne 5, 10, 15, 20, 60 kg szilvából?
b) Hány kg szilva szükséges 6, 12, 24, 36, 72 üveg szilvalekvár készítéséhez?

5. 2 liter tejből 35 dkg sajt készíthető. Mennyi tejből készül 2,8 kg sajt?

6. 100 forint 4 petákot vagy 400 fabatkát ér. Hány fabatkát ér egy peták?
Hány forintot ér

a) 25 peták és 5 fabatka; *b)* 100 peták és 2 fabatka; *c)* 844 fabatka?

Hány petákot (és ha kell, fabatkát) ér

d) 1012 forint; *e)* 10 112 forint; *f)* 537 forint?

7. Egy cukrászdában 8 adag vaníliasodó elkészítéséhez 6 tojást használnak fel. Hány adag sodó készül

a) 3; *b)* 18; *c)* 36; *d)* 60 tojásból?

Hány tojást használnak

e) 4; *f)* 16; *g)* 24; *h)* 56 adag sodó készítéséhez?

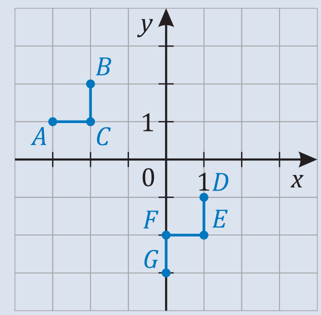
8. Alabárban a hivatalos pénznem a fabatka. 2 darab húszfabatkás érme súlya egyenlő 1 darab ötvenfabatkás érme súlyával. Ha 10 dkg húszfabatkás 120 fabatkát ér, akkor mennyit ér 20 dkg ötvenfabatkás?

9. *a)* Ha 1 ló 1 nap alatt 1 kupac abrakot fogyaszt el, akkor 7 ló 7 nap alatt hány kupac abrakot eszik meg?
b) Ha 1 nyúl 2 nap alatt 5 répát eszik meg, akkor 3 nyúl 10 nap alatt mennyi répát rágcsál el?
c) Ha 6 malac 9 nap alatt 216 vödör moslékot eszik, akkor 1 malac 1 nap alatt hány vödör moslékot habzsol be?

Játék

Alakítsatok párokat!

Mindkét játékos rajzoljon a füzetébe egy-egy koordináta-rendszert! A páros egyik tagja rajzoljon a koordináta-rendszerbe 1 db 2 egységnyi és 1 db 3 egységnyi vízszintes, illetve függőleges szakaszokból álló vonalat az ábrán látottakhoz hasonlóan! A berajzolandó pontok koordinátái (–3) és 3 közé eső egész számok legyenek. A páros másik tagjának az a feladata, hogy találja meg, hol lehetnek ezek a vonalak. A második játékos mondjon számpárokat, és az első játékos válaszától függően jelölje a saját koordináta-rendszerében a megtalált pontokat és a rossz javaslatokat, mert ez segítheti a megoldást!



Két játékot játsszatok, a második játékban cseréljetek szerepet!

1. példa

Egy 10 Ft-os érme tömege 6 gramm.

a) Mennyi a tömege 2, 4, 5, 8, 10 db 10 Ft-os érmének? Készítsünk táblázatot!

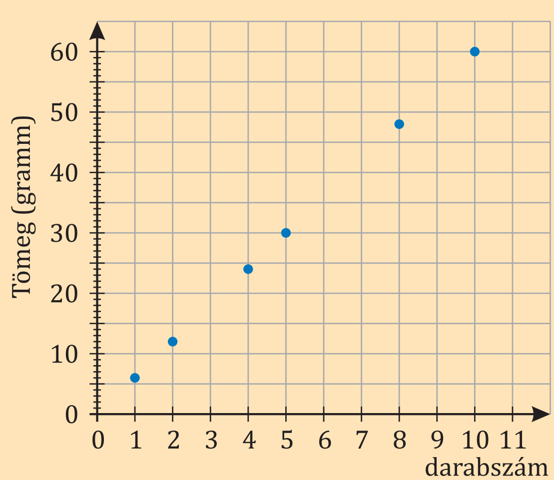
b) A táblázat felhasználásával készítsünk grafikont arról, mennyi a tömege 1, 2, 4, 5, 8, 10 db 10 Ft-os érmének!

Megoldás

a)

10 Ft-osok száma (db)	1	2	4	5	8	10
10 Ft-osok tömege (gramm)	6	12	24	30	48	60

b)



A grafikon pontjaira illeszthető egy egyenes, de a pontokat nem kötjük össze.

A pontokra illeszkedő egyenes áthalad az origón.

Kutatómunka

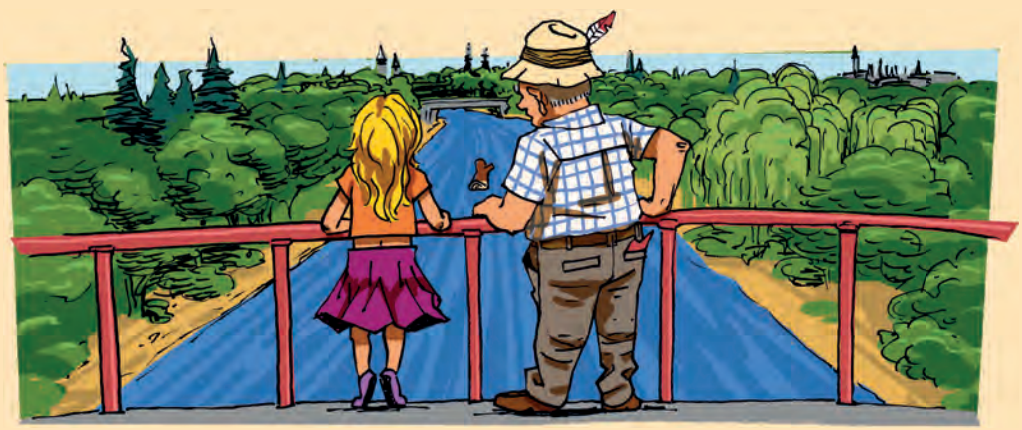
Hol használják fel azt, hogy az egyfajta pénzérme darabszáma és a tömege között egyenes arányosság van?

2. példa

Rozi a nagypapájával sétál a Tisza egyik hídján, amikor észreveszi, hogy a Tisza vizében egy farönk úszik. A folyó folyási sebessége 4 km óránként.

a) Hány km-re lesz a hídtól 2, 2 és fél, 3, 4, 5 óra múlva, ha a farönk nem akad el semmiben?

b) Készítsünk grafikont a farönk hídtól való távolságáról!

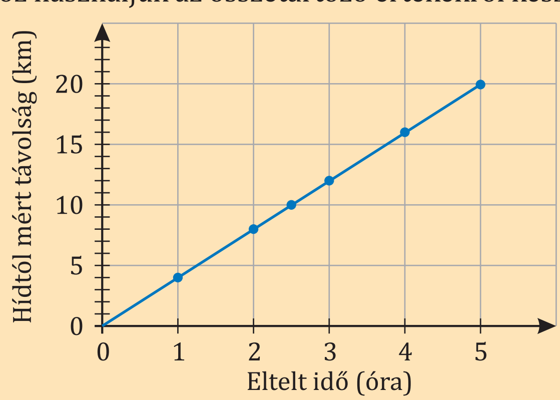


Megoldás

a) A hídtól mért távolságokat az alábbi táblázat tartalmazza:

Eltelt idő (óra)	1	2	2,5	3	4	5
Megtett út (km)	4	8	10	12	16	20

b) A grafikon megrajzolásához használjuk az összetartozó értékekről készített táblázatot.

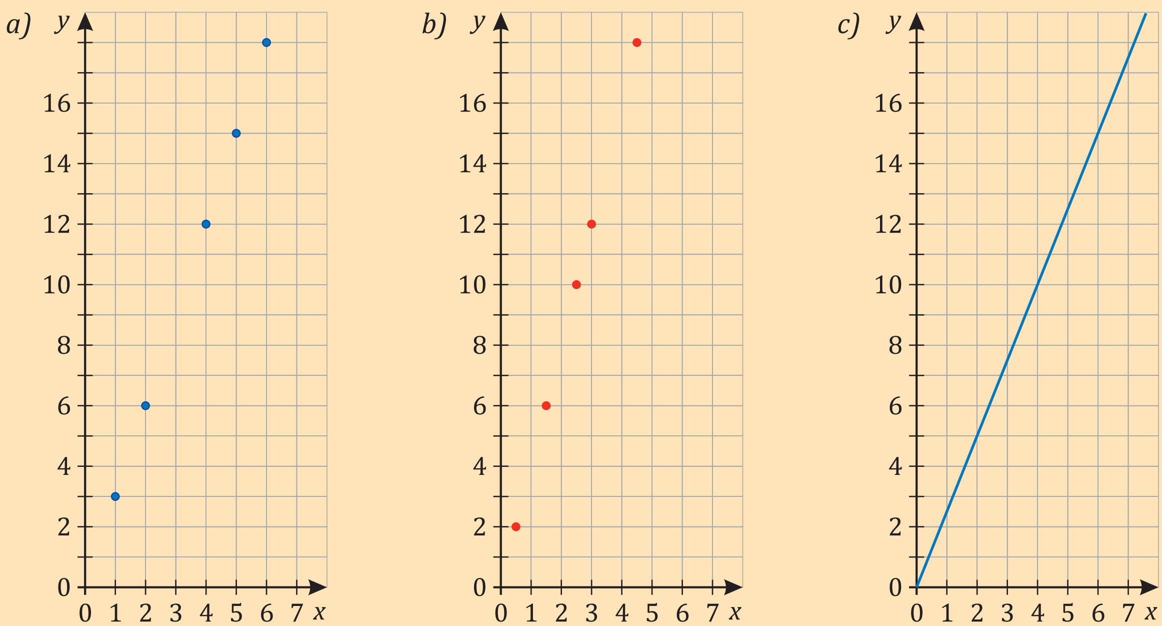


A grafikon pontjai összeköthetők, mert minden időpillanatban meg lehet mondani, mennyi utat tett meg a farönk. Ez az egyenes is áthalad az origón.

Az egyenes arányosság grafikonjának pontjai egy origón áthaladó egyenesre illeszkednek.

3. példa

Az egyenes arányosságot ábrázoló grafikonokról olvassuk le az összetartozó értékeket, majd fogalmazzunk meg összefüggést az adatok alapján!



Megoldás

a) A táblázat a leolvasott értékekkel:

x	1	2	4	5	6
y	3	6	12	15	18

Az y koordináta az x koordináta 3-szorosával egyenlő.

b) A grafikon pontjainak táblázatba foglalt koordinátái:

x	0,5	1,5	2,5	3	4,5
y	2	6	10	12	18

A pontokat jellemző számpárok második tagját úgy kaphatjuk meg, hogy a számpár első tagját megszorozzuk 4-gyel.

c) A grafikon egy félegyenes, ezért tetszőleges sok pont koordinátáit leolvashatjuk.
Egy lehetséges táblázatkitöltés:

x	0	1	2	3	4
y	0	2,5	5	7,5	10

A leolvasott pont x koordinátájának 2,5-szerese lesz a pont y koordinátája.

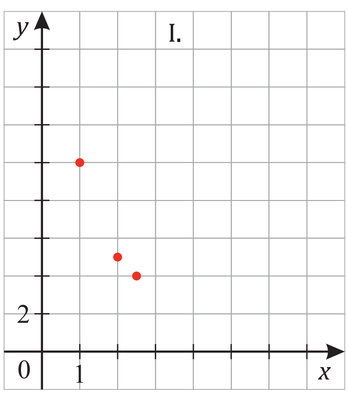
4. EGYENES ARÁNYOSSÁG GRAFIKONJA

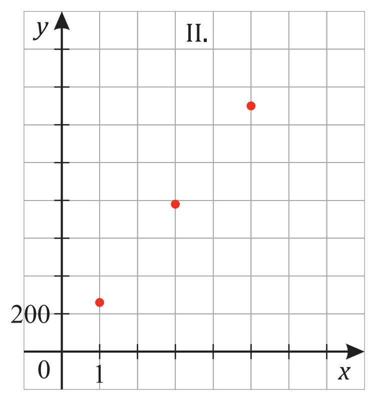
Csoportmunka

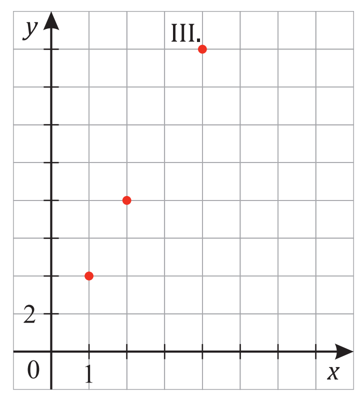
Készítsetek négyfős csoportokban szöveges feladatokat a 3. példa grafikonjaihoz. A csoport egy tagja olvassa fel a megalkotott szöveges feladatokat az osztálynak!

Feladatok

1. Döntsd el, melyik grafikon melyik szöveghez tartozik! Határozd meg azt is, melyek mutatnak közülük egyenes arányosságot!

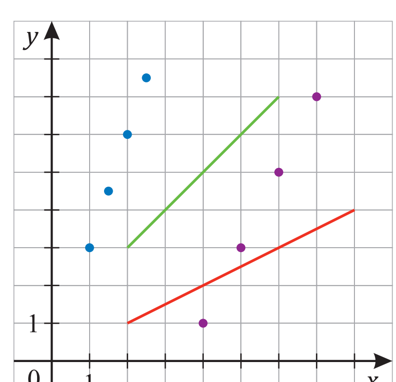






a) Egy üveg narancslével négy poharat, két üveggel nyolc poharat, négy üveggel tizenhat poharat tudunk teletölteni.
b) Egy üveg narancslével tíz darab 1 dl-es, vagy öt darab 2 dl-es, vagy négy darab 2,5 dl-es poharat tudunk teletölteni.
c) Egy üveg narancslé 3 napra, két üveg 6 napra, öt üveg 15 napra elég Rozi néninek.
d) Egy üveg narancslé 260 Ft-ba kerül, három ugyanilyen üveg narancslé 780 Ft-ba, öt üveg 1300 Ft-ba.
e) Készítsd el a hiányzó grafikont a füzetedbe!
f) Fogalmazd meg, miről lehet eldönteni egy grafikon alapján, hogy egyenes arányosságot ábrázol!

2. Döntsd el, hogy az ábrán látható grafikonok közül melyik mutat egyenes arányosságot a két mennyiség között! Találj ki hozzá egy szöveges feladatot!



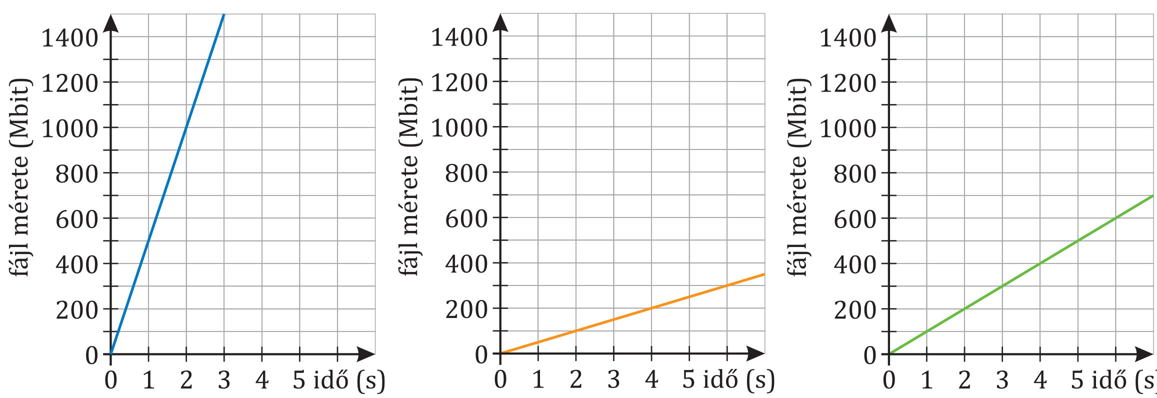
3. Az óra nagymutatója 1 óra alatt 360 fokot fordul.
a) Ábrázold koordináta-rendszerben az eltelt perceket és az elfordulás fokokban mért szögét!
b) Hány fokot fordul a nagymutató 5, 25, 100 perc alatt?
c) Mennyi idő telik el 90, 30, 10 fokos fordulat alatt?

4. Janka, Dávid és Gergő lelkesen készülnek az iskolai filmfesztiválra. Már leforgatták a filmet, jelenleg épp az utómunkálatok zajlanak. Janka a feliratokat készíti, Dávid vágja, Gergő pedig az effekteket rakja bele. Ha valamelyikük készen van egy munkafázissal, az iskolai szerverre tölti fel a filmet, hogy onnan a többiek letölthessék, és tovább dolgozhassanak rajta. Az alábbi táblázatban összefoglaltuk a gyerekek otthon használt internetes csomagjait.

Csomag	Letöltési sebesség	Feltöltési sebesség
Janka csomagja	150 Mbit/s	50 Mbit/s
Dávid csomagja	500 Mbit/s	100 Mbit/s
Gergő csomagja	1000 Mbit/s	500 Mbit/s

a) Jankának 3 percbe telik a szerverről letölteni a filmet. Számítsd ki, kinek meddig tart a film le- és feltöltése, ha a film mérete közben nem változik jelentősen?

b) Döntsd el, melyik grafikonon melyik letöltési, illetve feltöltési folyamatot ábrázoltuk a fenti hat lehetőség közül! A hiányzó grafikonokat rajzold meg a füzetedben!



5. Az építkezésen keletkezett hulladék elszállítására teherautókat rendelnek. 8 teherautóval 14 tonnát lehet elszállítani.

a) Hány teherautót rendeljenek 21 tonna hulladék elszállítására?

b) Mennyi hulladék szállítására képes 30 teherautó?

c) Ábrázold koordináta-rendszerben az összetartozó értékpárokat 8 teherautóig! Előtte készíts táblázatot!

6. Péternek és Pálnak összesen 14 darab 100 forintos pénzérméje van.

a) Hány darab érméjük lehet külön-külön? Készíts táblázatot!

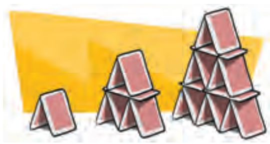
b) Ábrázold koordináta-rendszerben az összetartozó értékpárokat!

c) Egyenes arányosságról van szó ebben a feladatban? Véleményedet indokold!

7. Az iskola igazgatójának minden tanuló év végi bizonyítványát alá kell írnia. Mivel egy-egy osztály bizonyítványát a megfelelő oldalon kinyitva teszik az osztályfőnökök az asztalára, ezért 1 perc alatt 12 bizonyítványt tud aláírni. Készíts egy olyan grafikont, amelyik jól szemlélteti egy 480 fős iskola esetén az aláírt bizonyítványok számát és az aláírásokra fordított időt!

5. SZABÁLYOK, MEGFELELTETÉSEK

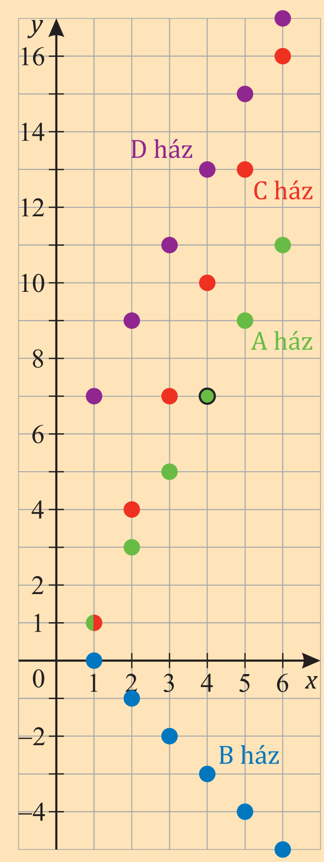
CSOPORTMUNKA



Építsetek kártyavárat a képen látható módon! Beszéljétek meg, hogy hány lap kell az 1, 2, 3, 4, 5, 10 szintes vár megépítéséhez!

1. példa

Matekváros Szabály utcájában 4 háromszintes ház van. Minden szinten két lakás van. A lakások 1-től 6-ig számozottak. A lakók ismerik a házuk betűjelét és a lakásuk számát. Beköltözéskor kapnak egy koordinátarendszert, amelyben a házuk lakásaihoz rendelt kapukódoknak megfelelő pontok szerepelnek. A pontok alapján fejtik meg a saját lakásuk kódját. A kapukód beütéséhez használható számlaptábla tartalmaz zárójelet, pontosvesszőt és mínusz előjelet is.



Például a grafikonon látható, hogy az A ház 4. lakásába a (4; 7) kóddal lehet bejutni.

a) Milyen kóddal lehet bejutni az B ház 5. lakásába?

b) Milyen kóddal lehet bejutni az C ház 3. lakásába?

c) Milyen szabály szerint lehet bejutni a házakba a lakásokhoz?

Megoldás

a) A B ház 5. lakásának kódja (5; –4).

b) A C ház 3. lakásának kódja (3; 7).

c) A kódok számpárokból állnak, melyek első tagja a lakás száma, a második tagját az alábbi szabályok adják meg:
Az A házban a lakásszám kétszereséből kell kivonni 1-et.
A B házban a lakásszám ellentettjéhez kell hozzáadni 1-et.
A C házban a lakásszám háromszorosából kell kivonni 2-t.
A D házban a lakásszám kétszereséhez 5-öt kell hozzáadni.

CSOPORTMUNKA

Alakítsatok 3-4 fős csoportokat! Készítsetek ti is egy szabály alapján megfejthető kódot! Ha minden csoport készen van, a csoport egyik tagja mondja el a többieknek a feladatot. A többi csoport fejtse meg a kódot! Jó kódfejtést!

2. példa

A Szabály utcában van egy iskola, ahol van egy szabályjáték terem. Minden nap egy szabályjátékot lehet megfejteni. Ha valaki 10-szer jól válaszol, akkor kap egy utalványt, amelyet a város legjobb pizzázójában egy nagy szelet pizzára lehet beváltani.
Az alábbi feladatokat Okoska az első három napon jól megoldotta. Vajon mit írt a táblázatok hiányzó celláiba? Töltsétek ki a táblázatok hiányzó részeit, és fogalmazzatok meg egy-egy megfeleltetési szabályt!

a)

△	1	2	3	5			8	
□	3	5	7		12	16		20

b)

♣	1	4	2,5	7				3
♠		11	8	17	22,8	10	21	

c)

Θ	2	4	6	7		9	10,5	
@	0	1			4			5

Megoldás

a)

△	1	2	3	5	**5,5**	**7,5**	8	**9,5**
□	3	5	7	**11**	12	16	**17**	20

A □ és a △ közötti összefüggés:
□ = 2 · △ + 1, ekkor a △ = (□ – 1) : 2

b)

♣	1	4	2,5	7	**9,9**	**3,5**	**9**	3
♠	**5**	11	8	17	22,8	10	21	**9**

♠ = 2 · ♣ + 3, ekkor a ♣ = (♠ – 3) : 2

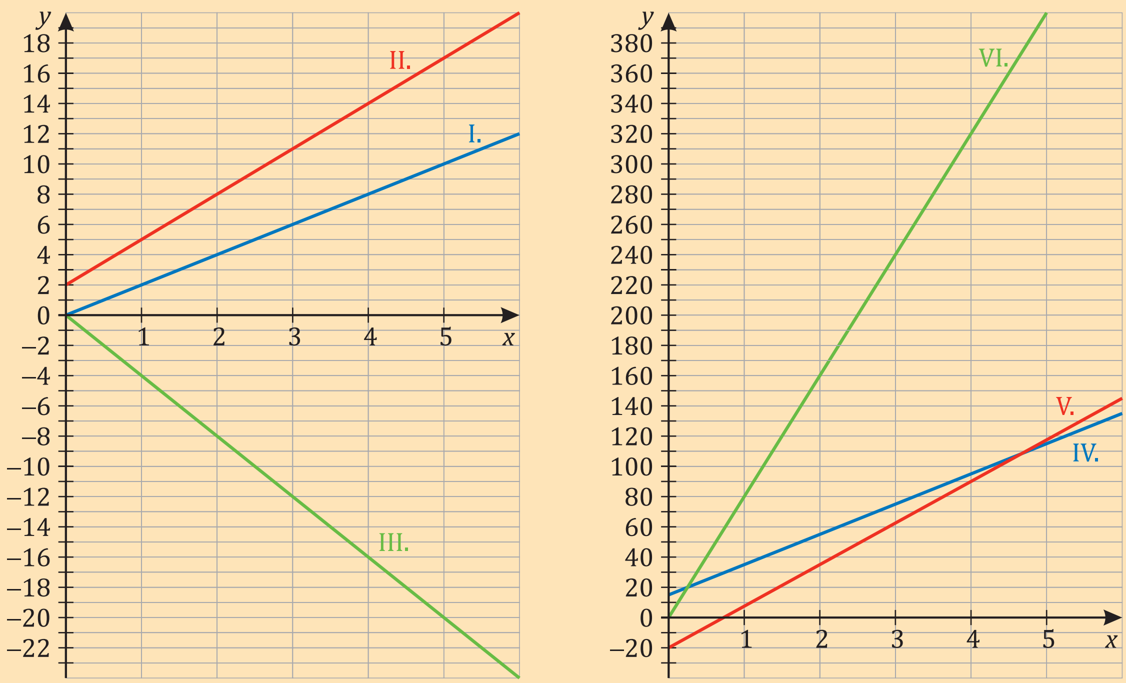
c)

Θ	2	4	6	7	**10**	9	10,5	**12**
@	0	1	**2**	**2,5**	4	**3,5**	**4,25**	5

$@ = \frac{1}{2}\Theta - 1$, ekkor a $\Theta = (@ + 1) \cdot 2$

3. példa

a) Az alábbi grafikonok közül melyek egyenes arányosság grafikonjai?



b) Határozzuk meg az egyenes arányosság összetartozó értékeinek hányadosát!

Megoldás

a) Az egyenes arányosság grafikonja az origón áthaladó egyenes. Ezért az I., a III. és a VI. grafikon egyenes arányosságot ábrázol.

b) Készítsünk táblázatot a grafikon néhány pontjáról!

I.

x	1	2	3	5
y	2	4	6	10

Az összetartozó értékek hányadosa: $\frac{y}{x} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{10}{5} = 2$

III.

x	1	2	3	5
y	−4	−8	−12	−20

Az összetartozó értékek hányadosa: $\frac{y}{x} = \frac{-4}{1} = \frac{-8}{2} = \frac{-12}{3} = \frac{-20}{5} = -4$

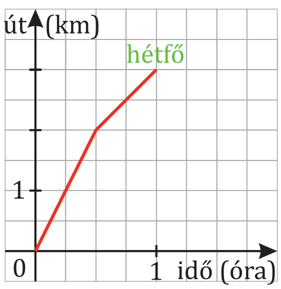
VI.

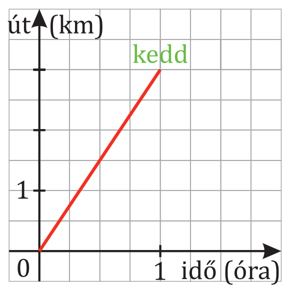
x	1	2	3	5
y	80	160	240	400

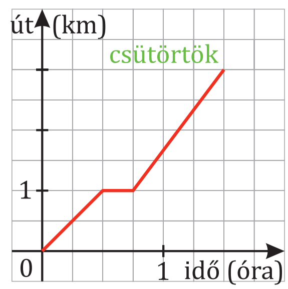
Az összetartozó értékek hányadosa: $\frac{y}{x} = \frac{80}{1} = \frac{160}{2} = \frac{240}{3} = \frac{400}{5} = 80$

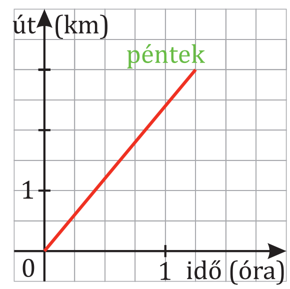
Feladatok

1. Bogi a héten négyszer is gyalog ment haza az iskolából. Hétfőn az első két km-en sietett és fél óra alatt megtette, majd kicsit elfáradt, lassabb tempóra váltott, így a maradék egy km-t is fél óra alatt tette meg.









a) Mikor haladt a leggyorsabban? Miről lehet ezt megállapítani?
b) Melyik napokon tartott 60 percnél tovább az útja?
c) Mit jelent a csütörtöki grafikonon a vízszintes szakasz?
d) Mely napokon volt állandó a sebessége?
e) Írj egy-egy történetet a másik három grafikonhoz is!

2. A számegyenesen élő kis gizmákokat meglátogatta egy petruk. Megkérdezte tőlük, nem szeretnének-e kimozdulni végre a számegyenesről. Ahelyett, hogy állandóan csak előre-hátra mászkálnak, mehetnének jobbra és balra is. A gizmákok nem ismerték a jobbra, balra szavakat, de a petruk elmagyarázta nekik, majd hozzátette, tulajdonképpen bármerre mehettek a síkon. Néhány bátor gizmák egyedül nekivágott a nagy kalandnak, és elindult az origóból.

a) Szepő az (1; 1), a (2; 2), majd a (3; 3) pontokra ugrott, és ezt így folytatta még 6 ugráson keresztül. Rajzold be a füzetedbe Szepő útját!
b) Kita először az (1; 2), majd a (2; 4) és végül ebben az irányban maradva utolsó ugrásként a (7; 14) pontokra ugrott. Rajzold be a füzetedbe Kita útját!
c) Zika utolsó ugrásával az (5; 20) pontra, az ezt megelőzővel a (4; 16) pontra érkezett. Rajzold be a füzetedbe Zika útját, ha tudod, hogy ebben az irányban összesen ötöt ugrott!
d) Fogalmazd meg szabállyal az egyes gizmákok haladási útját!

3. A gizmákok – fellelkesülve a síkbeli utazás gondolatától – építettek egy utat, melyet az origó és a (12; 6) pont közé feszítettek ki. Ez éppen keresztezte a petrukok ösvényét, ami a (0; 9) és a (9; 0) koordinátájú pontok között egyenesen haladt.
a) Ábrázold koordináta-rendszerben a két haladási útvonalat!
b) Melyik pontban keresztezik egymást az utak?
c) Készíts táblázatot az egyenesek pontjairól!
d) Fogalmazz meg mindkét egyeneshez egy-egy megfeleltetési szabályt!

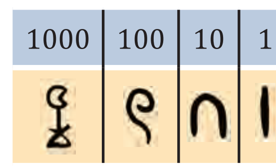
4. A csokigyárban többféle gépet is üzemeltetnek. Készíts mindhárom géphez táblázatot a megadott adatok alapján, és ábrázold koordináta-rendszerben, mennyi termékkel készül el 1, 2, 4, 7, 10 óra alatt az adott gép! Add meg a grafikonok megfeleltetési szabályát is!

a) Az egyik gép a mogyorós csokoládéhoz egész mogyorókat tör apró darabokra. Egy óra alatt 25 kg mogyorót aprít fel.

b) A bonbonkészítő gép olvasztott csokoládét csorgat a desszertformákba, egy éles késsel lekaparja a felesleget, majd hirtelen lehűti a desszerteket. Fél óra alatt 5 tálcával végez. Egy tálcában 75 desszertforma van.

c) A csomagológép szinte megállás nélkül dolgozik. 10 perc alatt 80 bonbont kell egyesével becsomagolnia.

5. A körülbelül 4000 éves egyiptomi leletekből a régészek megismerhették az ókori egyiptomiak számírását. Ahogy azt az ötödikes tankönyv 12. oldalán bemutattuk, az egyiptomiak a tízes számrendszerben, de a helyi érték használata nélkül számoltak. Ezeknek a jeleknek a felhasználásával, jobbról balra írva állították össze a számokat.

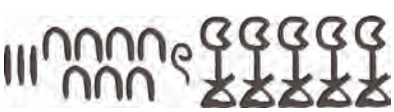


Például: 

Határozd meg, melyik számokat jelölik az alábbi jelsorok?

a) 

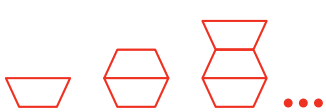
b) 

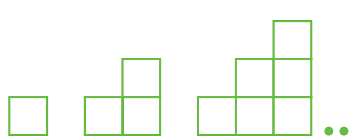
c) 

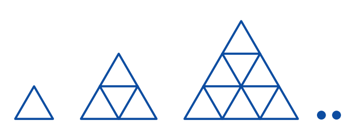
d) 

e) Írd le az 1552-t és a 2021-et egyiptomi jelekkel!

6. Andris különféle formájú elemekből az alábbi sorozatokat építette. Készíts táblázatot a sorozatok első 6-6 tagjáról! A táblázat egyik sorában az alakzat sorszáma, a másikban az alakzatban lévő kis elemek darabszáma szerepeljen! Ábrázold koordináta-rendszerben az összetartozó értékeket! Mely grafikon pontjai esnek egy egyenesre?

a)


b)


c)


7. A gyerekek különböző megfeleltetési szabályokat írtak a számgenerátorba, amire a gép a következő összetartozó számpárokat adta ki. Ábrázold a pontokat a koordináta-rendszerben! Találd ki, melyik gyerek milyen szabályt írt a gépbe!

1	2	4	7
6	7	9	12

Judit

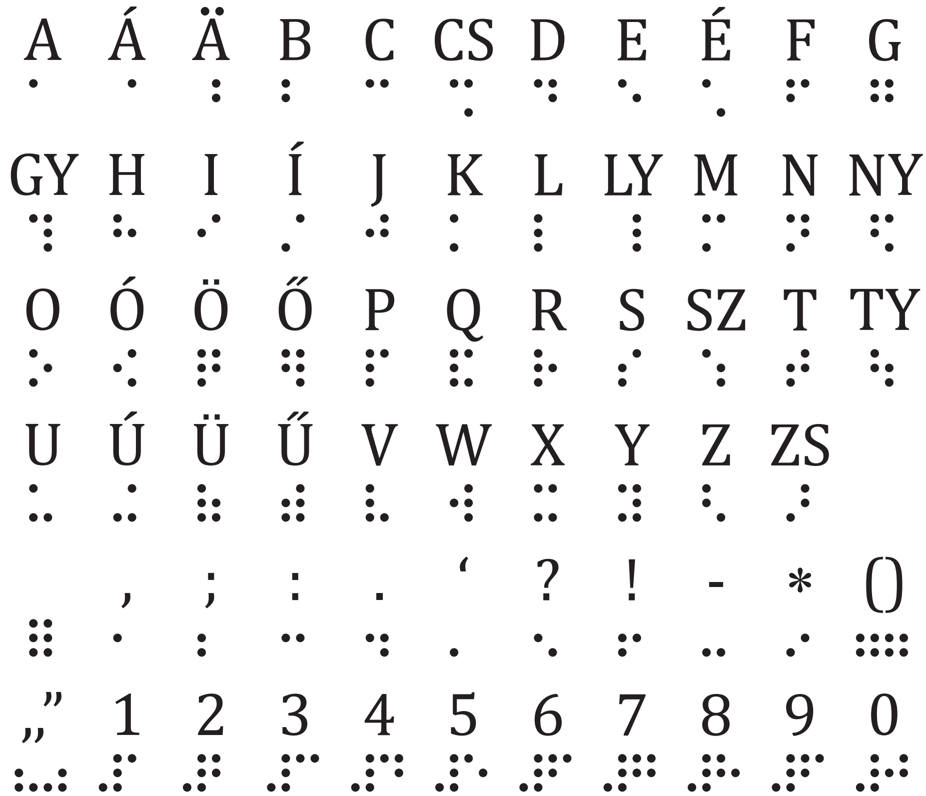
1	3	5	6
4	8	12	14

Elemér

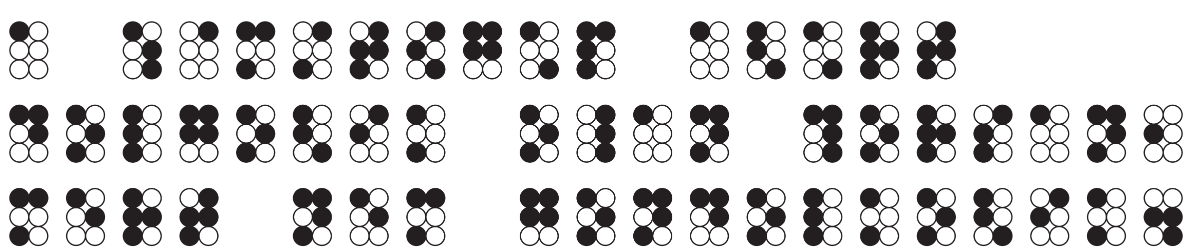
1	2	5	8
1	0	–3	–6

Jácint

8. A Braille-ábécét 1821-ben Louis Braille alkotta meg a vak emberek megsegítésére. Ezzel a módszerrel ők is megtanulhatnak írni és olvasni. Minden betűhöz, írásjelhez és számhoz egy jel tartozik.



a) Fejtsd meg, és írd le a hagyományos írásmóddal, mit jelent az alábbi mondat!



b) Írj le a Braille-ábécé segítségével egy mondatot a füzetedbe, cserélj füzetet a padtársaddal, és fejtsétek meg egymás feladványát!

KUTATÓMUNKA

Nézz utána a Morze-ábécé kódjainak, és fejtsd meg, hogy mit jelent a ··· ––– ··· jelsorozat!

6. TÖRTRÉSZ

Ha kaptok 8 barackot és el kell osztanod a testvéreddel, akkor elfelezitek. 4 barack a testvéredé, 4 barack a tied. A 8-at elosztottuk 2-vel, vagy másképp, a 8-at megszoroztuk $\frac{1}{2}$-del. A törttel való szorzás azt jelenti, hogy az adott szám törtrészét számítjuk ki. Az $\frac{1}{2}$-del való szorzás az $\frac{1}{2}$ részt jelenti.

1. példa

Matyi 10 fociskártyájának $\frac{3}{5}$ részén van magyar futballista.

a) Hány kártyán van magyar játékos? *b)* Hány kártyán van külföldi játékos?

Megoldás

Most a 10 kártya jelent 1 egészet.

Ennek az $\frac{1}{5}$ része: $10 \cdot \frac{1}{5} = 2$ kártya. A $\frac{3}{5}$ rész ennek a 3-szorosa: $2 \cdot 3 = 6$ kártya.

A $\frac{3}{5}$ részt közvetlenül is számolhattuk volna: $10 \cdot \frac{3}{5} = \overset{2}{\cancel{10}} \cdot \frac{3}{\underset{1}{\cancel{5}}} = 2 \cdot 3 = 6$ kártya.

Vagyis 6 kártyán látható magyar és 4 kártyán külföldi focista.

Megjegyzés: A külföldi játékosokat ábrázoló kártyák számát a következő módon is megkaphatjuk: Vegyük figyelembe, hogy ha a kártyák $\frac{3}{5}$ részén van magyar játékos, akkor $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ részén van külföldi játékos. Vagyis $10 \cdot \frac{2}{5} = 4$ kártyán.

2. példa

Anya 20 barackos fánkot készített. Gazsi leült vacsorázni, de meghagyta a fánkok $\frac{3}{4}$-ét. Matyi a megmaradt fánkok harmadát ette meg. Az ez után megmaradt fánkokat apa és anya osztotta el maguk között két egyenlő részre.

a) Hány fánkot evett meg Gazsi?
b) Hány fánkot evett meg Matyi?
c) Hány fánk jutott apának és anyának?

Megoldás

a) 1 egész rész $\quad\downarrow :4\quad$ 20 fánk $\quad\downarrow :4$

$\frac{1}{4}$ rész $\quad\downarrow \cdot 3\quad$ $\frac{20}{4} = 5$ fánk $\quad\downarrow \cdot 3$

$\frac{3}{4}$ rész $\quad$ $5 \cdot 3 = 15$ fánk

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a 20-at szorozzuk $\frac{3}{4}$-del.

Tehát 5 fánkot evett meg Gazsi, és 15 fánk maradt a tányéron.

b) Matyi a megmaradt 15 fánk harmadát ette meg, ez $15 : 3 = 5$.

Számolhattuk volna úgy is, hogy $15 \cdot \frac{1}{3} = 5$.

Ha a kezdeti 20 fánkból indulunk ki, akkor így is számolhatunk: $20 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = 5$.

Tehát Matyi is 5 fánkot evett meg.

c) Anya és apa a maradék 10 fánkot felezte el, tehát ők is 5-5 fánkot ettek meg.

Feladatok

1. Mennyi 300-nak az

a) $\frac{1}{3}$ része; *b)* harmada; *c)* $\frac{1}{3}$-szorosa; *d)* $\frac{1}{3}$-a?

2. Mennyi a 600-nak a

a) $\frac{2}{3}$ része; *b)* $\frac{3}{5}$ része; *c)* $\frac{9}{10}$ része; *d)* $\frac{7}{300}$ része?

3. Mennyi a 900-nak az

a) $\frac{1}{10}$-szerese; *b)* $\frac{4}{10}$-szerese; *c)* $\frac{7}{10}$-szerese; *d)* $\frac{12}{10}$-szerese?

4. Írd fel szorzat alakban és számold ki!

a) 2-nek az $\frac{1}{2}$ része; *b)* 8-nak a $\frac{3}{4}$ része; *c)* $\frac{3}{4}$-nek az $\frac{1}{3}$ része; *d)* $\frac{1}{4}$-nek a $\frac{2}{7}$ része.

5. Petiék megtették a 35 kilométeres út $\frac{80}{100}$ részét, amikor eleredt az eső, és aztán egész úton esett.

a) Az út hányad részét tették meg esőben?

b) Hány kilométert tettek meg esőben?

6. Az autóra felvett 1 400 000 forint kamatmentes családi kölcsön $\frac{4}{7}$ részét már visszafizettük.

a) Hány forintot fizettünk vissza?

b) Hány forint tartozásunk van még?

7. Melyik nagyobb,

a) $\frac{3}{5}$-nek az $\frac{5}{3}$ része, vagy $\frac{5}{3}$-nak a $\frac{3}{5}$ része; *b)* $\frac{4}{3}$-nak a $\frac{3}{4}$ része vagy $\frac{3}{4}$-nek a $\frac{4}{3}$ része;

c) $\frac{13}{7}$-nek a $\frac{7}{15}$ része vagy $\frac{7}{15}$-nek a $\frac{13}{7}$ része; *d)* $\frac{3}{11}$-nek a $\frac{3}{4}$ része vagy $\frac{3}{4}$-nek a $\frac{3}{11}$ része?

8. Írd fel szorzatalakban, és számítsd ki a 10 000

a) felének a felét; *b)* felének a negyedét; *c)* negyedének a felét;

d) nyolcadának a felét; *e)* ötödének a nyolcadát; *f)* ötödének az ötödét!

9. Számítsd ki 3000

a) $\frac{9}{20}$ részének a $\frac{2}{3}$ részét; *b)* $\frac{4}{5}$ részének a $\frac{3}{8}$ részét; *c)* $\frac{3}{5}$ részének az $\frac{1}{2}$ részét!

10. Zénó az első héten elolvasta egy 350 oldalas könyv $\frac{2}{7}$ részét, a második héten pedig a $\frac{2}{5}$ részét.

a) Hány oldalt olvasott az első héten?

b) Hány oldalt olvasott a második héten?

c) A könyv hányad részét olvasta el az első két hét alatt?

d) Hányad részét kell még elolvasnia a könyvnek?

11. Az óriási kiállítócsarnokban három egyforma nagyságú terem van. A termeket robotporszívó takarítja. Egy porszívó egy óra alatt kiporszívózza egy terem $\frac{3}{5}$ részét. Hány óra alatt készül el a három teremmel?

12. Nagymama 50 palacsintát sütött öt unokájának. Albi megette a palacsinták ötödét, Geri a maradék negyedét, Lencsi a maradék harmadát, Jankó a maradék felét, végül Liza megevett minden maradék palacsintát, amit a tányéron talált. Ki hány palacsintát evett?

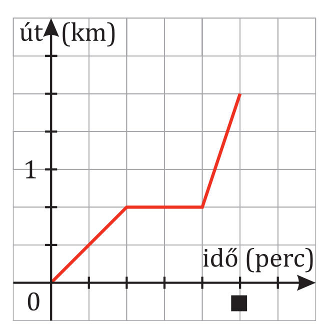
13. Nagyszerű hírek érkeztek az állatmenhelyről. Pénteken örökbe fogadták az ott lévő állatok felét, szombaton a maradék harmadát, vasárnap a maradék negyedét, így hétfő reggel már csak 9 állat volt gazdi nélkül. Szerencsére eközben több állat nem érkezett. Hány állat volt pénteken nyitáskor a menhelyen?

Létraverseny I.

A Soseaddfel csapat szerencsésen túlélte a zord rengetegben tett kalandozásokat, és végre egy tisztásra ért. A tisztás közepén egy létra állt. A tetejét valaki egy kis felhőnek támasztotta. Csodálkozva nézegették, majd észrevették a létra egyik lábára tűzött papírt, amin a következők álltak:

> *Egyre közelebb a CÉL! Másszatok fel ezen a létrán fokról fokra haladva. Minden lépcsőfokra gondosan ügyeljetek. Ha hibátlanul dolgoztok, a létra tetejére érve kezetekben lesz a bűvös háromjegyű szám, ami a titkos kód első három számjegye.*
> *Összesen 40 percetek van arra, hogy ezen a létrán feljussatok, utána bezárul a felhőkapu.*

1. Anni és Panni évek óta a legjobb barátnők. Életkoruk aránya 5 : 6. Ketten együtt 22 évesek. Hány éves közülük az idősebb? Jelölje ezt a számot a ♣ jel!
2. A hatodikosok matekdolgozata bravúrosan sikerült. A négyes–ötös dolgozatok aránya 4 : ♣ lett. Csak 9 gyerek kapott négyest, a többiek ötöst. Hány fős ez a hatodikos osztály? Jelölje ezt a számot a ☼ jel!
3. Ha 5 nap alatt 3 autóversenyző ☼ kocsit tesztel, akkor ugyanezt a tempót feltételezve 20 nap alatt hány versenyző tesztel 432 kocsit? Jelölje a versenyzők számát a ♠ jel!
4. Összekötöttem a koordináta-rendszerben a (3; 2) pontot a (♠; 6) ponttal. Ha ez a vonal egy egyenes arányosság grafikonja, akkor a keresett szám a ♠ + 6, ha nem egyenes arányosság grafikonja, akkor a ♠ – 6. Végezd el a műveletet, és az így kapott számot jelölje ■!
5. Luca és Dóri együtt indultak el az iskolától hazafelé, mert egy darabig egy irányba vezetett az útjuk. A grafikon Luca útját mutatja, aki ■ perc alatt ért haza. Mielőtt elbúcsúztak volna egymástól, még megálltak, és beszélgettek kicsit. Hány percet ácsorgott a két lány? Jelölje ezt a számot a △ jel!



6. Zsolti detektívkönyv-sorozatának végre megjelent a következő kötete. Reggel első dolga volt megvenni, és a könyvesboltból hazafelé menet már el is kezdte olvasni. Délelőtt elolvasta a könyv $\frac{1}{\triangle : 2}$ részét, ebéd után a maradék $\frac{1}{\triangle + 2}$ részét, az utolsó 112 oldallal pedig végzett vacsoráig. Hány oldalas volt a könyv? **Ez a szám lett a kód első három számjegye.**

A következő létrarejtvényt a 164. oldalon találod.

7. SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS

Százalékszámítással már a Kr. e. 300-as évekből származó babiloni leleteken is találkoztunk, de a mindennapjainknak is szerves része. Az árváltozásokat, a kamatokat, az adókat százalékban fejezik ki: 20 százalékos árleszállítás, 8 százalékos kamat, 15 százalékos adó stb.

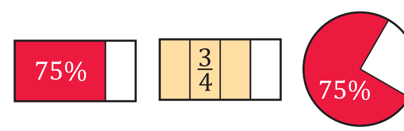
A mindennapi életben gyakran hasonlítunk össze mennyiségeket nem a nagyságuk, hanem az egymáshoz viszonyított arányuk alapján. A százalékkal is mennyiségek arányát fejezzük ki.

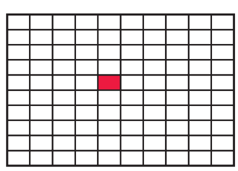
A százalék jele: %. **1 egész = 100%.**

Írásban így jelenik meg: 20%, 8%, 10%.

Az 1 egésznek az $\frac{1}{5}$ része $= 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{20}{100} = 0{,}2$, vagyis $100\% \cdot \frac{1}{5} = 20\%$.

Az 1 egésznek a $\frac{3}{4}$ része $= \frac{75}{100} = 0{,}75 = 75\%$.





Egy szám 1%-a, vagyis századrésze, $\frac{1}{100}$ része ugyanazt jelenti, mint az $\frac{1}{100}$-szorosa.

A víz és az emberi szervezet

A kisgyerekek szervezetének víztartalma magasabb 75%-nál, míg a felnőtteké 60-70%. A kiszáradás fejfájást, fáradékonyságot okoz, és vele jár a teljesítmény romlása is. Az elvesztett vízmennyiséget feltétlenül pótolnunk kell.

1. példa

A 30 fős 6. b osztály tanulóinak 20%-a színjátszó szakkörre jár. Hányan járnak az osztályból a szakkörre?

Megoldás

I. módszer, törtrész segítségével

20% a $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ rész, azaz a 30 gyerek $\frac{1}{5}$-e, $30 \cdot \frac{1}{5} = 6$. Az osztályból 6-an járnak színjátszó szakkörre.

II. módszer, következtetés 1%-ra

30 fő 100%	30-nak az 1%-a, 1%	30-nak a 20%-a, 20%
30	$\frac{30}{100} = \frac{3}{10} = 0{,}3$	$\frac{30}{100} \cdot 20 = \frac{3}{10} \cdot 20 = 0{,}3 \cdot 20 = 6$

2. példa

Egy állatkertben zsiráffiú született. Megkérdezték az interneten az embereket, milyen nevet adjanak az újszülöttnek. A felhívásra 25 000 e-mail érkezett. A sok levél miatt az üzeneteknek csak a 2%-át dolgozták fel. Hány levelet olvastak el?

Megoldás

I. módszer:

A 2% az $\frac{2}{100} = \frac{1}{50}$ rész, azaz 25 000-nek az $\frac{1}{50}$ része $25\,000 \cdot \frac{1}{50} = 500$.

II. módszer:

100%	1%	2%
25 000	$25\,000 \cdot \frac{1}{100} = 250$ vagy $25\,000 \cdot 0{,}01 = 250$	$25\,000 \cdot \frac{1}{100} \cdot 2 = 250 \cdot 2 = 500$ vagy $25\,000 \cdot 0{,}01 \cdot 2 = 250 \cdot 2 = 500$

(Az 500 e-mail alapján Abebének nevezték el a kis zsiráfot.)

Egy szám vagy mennyiség 1%-a az $\frac{1}{100}$ része, azaz $\frac{1}{100} = 0{,}01$-szorosa.

Kiszámítása: Az adott számot vagy mennyiséget elosztjuk 100-zal, vagy megszorozzuk $\frac{1}{100}$-dal.

3. példa

Számítsuk ki 1500-nak a 60%-át!

Megoldás

	100%	1%	60%
közönséges tört alakban	1500	$1500 \cdot \frac{1}{100} = 15$	$15 \cdot 60 = 900$
tizedes tört alakban	1500	$1500 \cdot 0{,}01 = 15$	$15 \cdot 60 = 900$

Egy lépésben:

Az előző két szorzást egyszerre végezzük el, 1500-at megszorozzuk $\frac{1}{100} \cdot 60 = \frac{60}{100}$-dal.

Tehát 1500-nak a 60%-a: $1500 \cdot \frac{60}{100} = 900$.

Egy lépésben tizedes törttel szorozva:

Mivel $\frac{60}{100} = 0{,}6$, ezzel is szorozhatunk: 1500-nak a 60%-a egyenlő $1500 \cdot 0{,}6 = 900$.

Feladatok

1. Számold ki a füzetedben 1000-nek

a) az 1%-át; *b)* a 2%-át; *c)* az 5%-át; *d)* a 10%-át;
e) a 20%-át; *f)* a 25%-át; *g)* a 110%-át; *h)* a 150%-át!

2. Add meg grammban a 2 kg

a) 1%-át; *b)* 5%-át; *c)* 13%-át; *d)* 28%-át;
e) 100%-át; *f)* 130%-át; *g)* 175%-át; *h)* 210%-át!

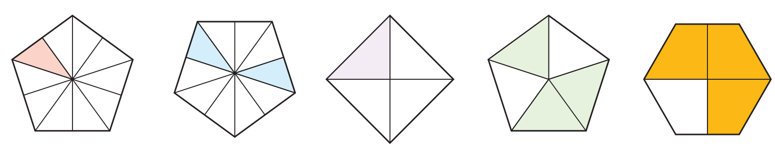
3. Számold ki a füzetedben 240-nek az (a)

a) 5%-át, 10%-át, 12%-át, 20%-át, 60%-át, 80%-át!

b) $\frac{1}{20}$ részét, $\frac{1}{10}$ részét, $\frac{3}{25}$ részét, $\frac{1}{5}$ részét, $\frac{3}{5}$ részét, $\frac{4}{5}$ részét!

c) Írd le az *a)*, illetve a *b)* részben kiszámított egyenlő értékek kapcsolatát $\left(\text{pl. } 25\% = \frac{1}{4} \text{ rész}\right)$!

4. Az alábbi alakzatok hány százaléka színezett és hány százaléka nem színezett?



5. Melyik több és mennyivel?

a) 20 000 Ft 40%-a vagy 100 000 Ft 10%-a?
b) 100 liter 12%-a vagy 200 liter 6%-a?
c) 12 km 150%-a vagy 50 km 20%-a?
d) 20 km 30%-a vagy 4000 m 120%-a?
e) Másfél óra 50%-a vagy fél óra 150%-a?
f) Egy nap 25%-a vagy 3 óra 150%-a?

6. A tavaly 250 fős felső tagozat létszáma az idénre 4%-kal növekedett.

a) Hány felsőssel van több idén?
b) Hány felsős van idén összesen?

7. A hatodikosok felméréseket készítettek a 36 fős osztályukban. Kiderült, hogy az osztály 75%-a sportol, 50%-a játszik valamilyen hangszeren, 20%-a énekel az iskolai kórusban, 25%-a szeret komolyzenei koncertre járni és 100%-a szeret moziba járni.

a) Számítsd ki, melyik érdeklődési körhöz hány gyerek tartozik!
b) Sajnos a hatodikosok valamit elszámoltak, így az egyik adat hibásan szerepel. Melyik az, és miért gondolod hibásnak?
c) Készítsetek hasonló felmérést az osztályban!

8. Zsófi telefonjának kijelzőjén öt függőleges vonal jelzi az akkumulátor teljes töltöttségét. Ha az akkumulátor töltöttsége 80%-ra csökken, az öt vonalból egy eltűnik, ha 60%-ra, akkor még egy, és így tovább. Mekkora lehet az akkumulátor töltöttsége, ha a kijelzőn két vonal látható?

9. Egy televíziós tehetségkutató verseny döntőjében a két együttes közti sorrendet közönségszavazatok döntik el. Telefonon és interneten is lehet szavazni. A 62 500 telefonos szavazat 43%-át az Iker Prímek Duó, a 7500 internetes szavazat 22%-át a Kecskerímek Band együttes kapta. Ki nyerte a döntőt?

1. példa

Egy 700 fős iskolában a diákok 12%-a tanul zenét. A zenét tanuló diákok 25%-a sportol is.
a) Hány diák tanul zenét az iskolában?
b) Hány zenét tanuló sportoló van az iskolában?

Megoldás

a) 700 tanuló 12%-a: $700 \cdot 0{,}12 = 84$.
84 diák tanul zenét az iskolában.
b) 84 diák 25%-a kiszámítható $84 \cdot 0{,}25 = 21$ művelettel.
A 25% az $\frac{1}{4}$ rész, ezért 84-nek az $\frac{1}{4}$ része: $84 \cdot \frac{1}{4} = 21$.
Az iskola 21 diákja zenét is tanul és sportol is.

2. példa

Egy elektronikai üzlet akciót hirdet a számítógépek megvásárlására.
Egy 185 000 Ft-os laptopot 20%-kal olcsóbban lehet megvenni. Marciéknak törzsvásárlói kártyájuk van, amire további 3% kedvezményt adnak.
Mennyiért tudják Marciék megvásárolni az akció során a laptopot?

Megoldás

Ha a laptopot 20%-kal olcsóbban lehet megvásárolni, akkor az engedmény 185 000 Ft-nak a 20%-a.
Ez $185\,000 \text{ Ft} \cdot \frac{20}{100} = 185\,000 \text{ Ft} \cdot 0{,}2 = 37\,000 \text{ Ft}$.
$185\,000 \text{ Ft} - 37\,000 \text{ Ft} = 148\,000 \text{ Ft}$ a laptop 20%-kal csökkentett ára.

A törzsvásárlói kártyára járó kedvezmény 3%, ezért a 148 000 Ft 3%-át levonjuk a 148 000 Ft-ból.
$148\,000 \text{ Ft} \cdot 0{,}03 = 4440 \text{ Ft}$, így a laptop ára $148\,000 \text{ Ft} - 4440 \text{ Ft} = 143\,560 \text{ Ft}$.

Gondolkodhatunk a következőképpen is:
A laptop eredeti ára 100%, ami 185 000 Ft. Ha 20%-kal olcsóbban lehet megvenni, akkor az eredeti ár $100\% - 20\% = 80\%$-át kell fizetni.
185 000 Ft-nak a 80%-a $185\,000 \text{ Ft} \cdot 0{,}80 = 148\,000 \text{ Ft}$.

Ha a további kedvezmény 3%, akkor most a 148 000 Ft a 100%. Ekkor $100\% - 3\% = 97\%$-ot kell kiszámítani.
$148\,000 \text{ Ft} \cdot 0{,}97 = 143\,560 \text{ Ft}$ a végső ár.

KUTATÓMUNKA

Gondold végig, hogyan tudod egy műveletsorral kiszámolni a számológép segítségével a 180 000-nek a 20%-át! Próbáld ki más számokkal is, működik-e az ötleted!

3. példa

Marci édesapja elmagyarázta Marcinak, hogyan lehet kiszámítani az előző példában a laptop kedvezményes árát.
Marci gondolkodott, majd megkérdezte apukájától, nem lenne-e olcsóbb a laptop, ha először a törzsvásárlói kedvezményt számítanák ki, majd azután a bolt által nyújtott kedvezményt?
Válaszoljunk Marci kérdésére!

Megoldás

Ha először a törzsvásárlói kedvezményt vesszük igénybe, akkor most a 185 000 Ft-nak kell kiszámolnunk a 97%-át, ami 179 450 Ft.
Ezután a cég 20%-os kedvezménye a 179 450 Ft-os árra vonatkozik. Most 179 450 Ft-nak a 80%-át kell kiszámolni, 179 450 Ft · 0,8 = 143 560 Ft.
Marci ezek után belátta, hogy mindegy milyen sorrendben vesszük igénybe a kedvezményeket.

4. példa

Andrásék közelében található egy kis élelmiszerbolt és egy nagy bevásárlóközpont. András pontos kimutatást vezet a két bolt árairól. A tej literje a kisboltban 200 Ft, a nagy boltban 15%-kal olcsóbb. A kenyér kilója a kisboltban 250 Ft, a nagyban 20%-kal több. A krumpli a kisboltban 300 Ft, a nagyban 10%-kal olcsóbb.
András bevásárlólistáján 2 kg kenyér, 3 liter tej és 5 kg krumpli szerepel.
a) Ha az összes árut egy helyen veszi meg, akkor mennyit fizetne az egyik, illetve a másik helyen?
b) Mennyi lenne a megtakarítása az olcsóbb bolthoz képest, ha mindent ott vesz meg, ahol olcsóbb?

Megoldás

a) András egy táblázatot készített:

Áru	Egységár a kisboltban	Egységár a nagy boltban
Tej	200 Ft	15%-kal olcsóbb, tehát a 200 Ft 85%-a: 200 Ft · 0,85 = 170 Ft
Kenyér	250 Ft	20%-kal több, tehát a 250 Ft 120%-a: 250Ft · 1,2 = 300 Ft
Krumpli	300 Ft	10%-kal olcsóbb, tehát a 300 Ft 90%-a: 300 Ft · 0,9 = 270 Ft

	A kisboltban	A nagy boltban
3 liter tej	3 · 200Ft = 600 Ft	3 · 170 Ft = 510 Ft
2 kg kenyér	2 · 250 Ft = 500 Ft	2 · 300 Ft = 600 Ft
5 kg krumpli	5 · 300 Ft = 1500 Ft	5 · 270 Ft = 1350 Ft
Összesen:	2600 Ft	2460 Ft

Az adott bevásárlólistán lévő áruk esetén a nagy boltban olcsóbban vásárolhatunk. A megtakarítás: 2600 Ft – 2460 Ft = 140 Ft.

b) 3 liter tej: 510 Ft; 2 kg kenyér: 500 Ft; 5 kg krumpli: 1350 Ft
Összesen: 2360 Ft A megtakarítás az olcsóbb bolthoz képest 100 Ft.

Feladatok

1. Szezonvégi kiárusítás alkalmával egy 24 000 Ft-os telefon árát 20%-kal csökkentették. Mennyiért lehet megkapni most?

2. Andris a százalékszámítás-dolgozatra készül. Megoldotta a feladatgyűjtemény 40 darab témához tartozó feladatának 55%-át. Hány feladatot kell még megoldania, ha szeretné az összeset megcsinálni?

3. Egy 50 000 Ft-os termék árát kedden 20%-kal megemelték. Csütörtökön újabb árváltozás történt: 20%-os leárazás. Számítsuk ki a termék pénteki árát! Számítsuk ki a pénteki árat akkor is, ha a két 20%-os árváltozás fordított sorrendű, először történik a leárazás, azután az emelés!

4. Egy kifutó árucikkeket forgalmazó áruház 50%-os árengedményt hirdetett meg egy eredetileg 6000 Ft-os termékre. A termék az akció ellenére nem fogyott elég gyorsan, ezért az új árból még 50%-ot engedtek. Ennek hatására már gyorsan elfogyott a készlet.
Mennyibe került a termék az első és a második akció után?

5. Ha Magyarországon megvásárolsz valamit, akkor annak árában adót is fizetsz. Ez az áfa (általános forgalmi adó), ami általában 27%. Ez azt jelenti, hogy ha valaki előállít egy 100 forint árú terméket, akkor ahhoz 27 forint áfa társul, azaz 127 forintért adja el. Vannak kedvezményes termékek, ilyen például a könyv, amikor az áfa csak 5%.

a) Számítsd ki, hogy mennyibe kerülnek áfával együtt azok a könyvek, melyeknek előállítási költségét az alábbi táblázat tartalmazza!

Szerző	Cím	Ár (Ft)
Berg Judit	Rumini	2520
J. K. Rowling	Harry Potter és a bölcsek köve	2940
Jeff Kinney	Egy ropi naplója	2100
Rick Riordan	Percy Jackson és az olimposziak 1. A villámtolvaj	3045
Arany János	Toldi, Toldi szerelme, Toldi estéje	1470

b) Számítsd ki, hogy mennyi áfát kell ráfizetned az alábbi előállítási költségű termékekre, és mennyiért lehet így megvásárolni ezeket a boltban! Ahol szükséges, ott kerekíts egészre!

A) 1 kifli 18 Ft
B) 1 kg kenyér 210 Ft
C) tévé 119 000 Ft
D) autó 3 995 000 Ft
E) lakás 16 400 000 Ft
F) pendrive 2500 Ft

6. Egy erdőben 2021-ben 10 000 fa van, és minden évben 5%-kal nő az erdőben lévő fák száma.

a) Hány fa lesz az erdőben egy év múlva, 2022-ben?
b) Hány fa lesz az erdőben újabb egy év múlva, 2023-ban?
c) Hány fát vághat ki az erdészet 2024-ben, ha az erdő 12%-ának a kivágására kaptak engedélyt?
d) Hány fa marad a kivágások után az erdőben?
e) A megmaradt fák 50%-nak a tetején madárfészket találunk. A fészkek harmadában egy-egy tojás van. Hány tojás van összesen a fákon?

7. Tejszínből vajat készítünk. Ennek során a tejszín tömegének 62%-a lesz a vaj tömege. Készíthető-e 5 kg vaj 8 kg tejszínből?

8. A hatodik évfolyamra 60 gyerek jár. A hatodikosok 85%-a sportol, és közülük minden harmadik gyerek valamilyen iskolai szakkörre is jár. Hány olyan hatodikos van, aki sportol, de nem jár iskolai szakkörre?

9. Magor kedvenc csokija 160 forintba kerül általában, de ma szerencsére a sarki kisboltban minden édesség 15%-kal olcsóbb. Magor eredetileg hét darab csokit szeretett volna venni (a hét minden napjára egyet). Tud-e nyolc csokit venni az akció keretében a hét csoki eredeti áráért? Ha igen, mennyi pénze marad? Ha nem, mennyi hiányzik?

10. A tanár kiosztotta a 6. a osztály százalékszámításból írt dolgozatát, és azt mondta: „Gyerekek, ez pocsékul sikerült. Az osztály 37%-ának egyes lett a dolgozata."
Csongi erre hátulról közbekiabált: „Nem is vagyunk annyian az osztályban!" Miután kinevetgélték magukat, alapos ismétlésbe kezdtek. Hányan lehettek az osztályban, és hány tanuló dolgozata lett elégtelen, ha a dolgozatok 37%-a lett egyes? A dolgozatok számának 37%-a egészre kerekített érték, és az osztályban 20-nál több, de 30-nál kevesebb tanuló volt.

11. A 6. a-ban az irodalomórán is lehetett derülni. A tanáruk éppen arról mesélt, hogy egy statisztika szerint a 14 éves fiúk 59%-a és a lányok 41%-a heti egy óránál kevesebbet olvas, amikor Csongi közbekotyogott. „Jé! Ez éppen 100%. Akkor egyetlen gyerek sem olvas heti egy óránál többet!" Szegény Csongit már megint kinevették a többiek. Miért?

12. Jankó régóta gyűjt egy tabletre. Már 28 000 forintja összegyűlt, de sajnos a kiválasztott gép 32 000 forintba kerül. Szerencséjére meglátott egy akciót a bolt weblapján, miszerint a jövő héten minden tabletre 10% árengedményt adnak. Azt is észrevette, ha szerdán este 18.00 és 20.00 között rendeli meg, akkor újabb 3% engedményt kap a már leárazott termék árából. Elég lesz-e Jankó pénze, ha jövő héten szerdán este 7 órakor rendeli meg a tabletet? (A kiszállítási díj minden 20 000 Ft feletti termékre 0 Ft.)

13. Tegyük fel, hogy az osztályod minden tanulója válaszol az alábbi kérdésekre:

Az osztálytársaid hány százaléka
a) szemüveges *b)* lány *c)* szemüveges fiú?
Hányféle helyes válasz születhet az egyes kérdésekre? Melyek ezek, és kik adják?
Elképzelhető olyan osztály, ahol az *a)* kérdésre mindenki ugyanazt a helyes választ adja?
Ha igen, akkor hogyan?

14. Egy konzervgyárban adagolóautomata tölti a csokoládékrémes dobozokat. Az automata által adagolt anyag mennyisége ingadozik. A dobozon feltüntetett névleges értéktől vett 2%-os eltérés mindkét irányban megengedhető. Milyen határok között változik egy 400 grammos csokoládékrémes doboz tartalmának tömege?

15. Egy illatszerbolt akciós kuponja a következő kedvezményt ajánlja: „Ha a kupon felmutatója két terméket vásárol, akkor az olcsóbb árából 20%, a drágábból 40% kedvezményt kap." Vince édesanyja egy 850 Ft-os sampont és egy 2200 Ft-os hajfestéket vásárol. Megkéri Vincét, hogy számítsa ki a kuponnal elérhető megtakarítás nagyságát. A helyesen kiszámított eredmény jutalmaként felajánlja, hogy a megtakarítás 40%-ával növeli Vince havi zsebpénzét. Vince természetesen jól számította ki a megtakarítás nagyságát. Mennyi lett Vince zsebpénz-kiegészítése?

Játék

A bűvész trükkje

Gondoljatok egy pozitív egész számra! Szorozzátok meg 6-tal, majd az eredményhez adjatok 30-at! Az összeget osszátok el 6-tal, majd vonjátok ki a gondolt számot!

Mit kaptatok eredményül?

Próbáljátok ki több számmal is!

Ötödik osztályban tanultunk a nyitott mondatokról. Ezeket próbálgatással vagy a lebontogatás módszerével oldottuk meg. Ismételjük át a tanultakat!

1. példa

Az iskola kispályás focibajnokságot szervez. A hatodikosok közül 4 fő kivételével minden fiú jelentkezett, így az évfolyam 5 csapatot nevez a bajnokságra. A kispályás focit 6 fős csapatok játsszák. Hány fiú van az évfolyamon?

Megoldás

A fiúk számánál 4-gyel kisebb szám a játékosok száma; ennek hatodrésze a csapatok száma.

Visszafelé gondolkodva: 5 csapat játékosainak száma: $5 \cdot 6 = 30$. Az évfolyam fiútanulói ennél 4-gyel többen vannak, tehát 34-en.

A csapatok számából kiindulva kiszámoltuk a fiúk számát; a fiúk számának ismeretében eljuthatunk a csapatok számához. A lépéseket bemutató folyamatábra:

csapatok száma		játékosok száma		fiú tanulók száma
5	$\xrightarrow{\cdot 6}$	30	$\xrightarrow{+4}$	34
=		=		=
5	$\xleftarrow{:6}$	30	$\xleftarrow{-4}$	34

Ellenőrzés: 34 fiú közül 4 nem focizik, így 30-an vesznek részt a bajnokságon. $30 : 6 = 5$ csapat nevezett.

Két dolog is feltűnő:

A: Az egymás alatti téglalapokban ugyanazokat a számokat látjuk.

B: Az egymás alatti nyilak fölött ugyanazok a számok szerepelnek, de szorzás helyett osztás, összeadás helyett kivonás művelettel.

A fiúk számát jelölje: △

fiútanulók száma		játékosok száma		csapatok száma
△	$\xrightarrow{-4}$	△ – 4	$\xrightarrow{:6}$	(△ – 4) : 6
‖		‖		‖
34	$\xleftarrow{+4}$	30	$\xleftarrow{\cdot 6}$	5

A jobb szélső oszlop két sorának egyenlősége a feladathoz tartozó nyitott mondat: (△ – 4) : 6 = 5.
Az alsó sor a lebontogatás (visszafelé gondolkodás) módszerével a nyitott mondat megoldását mutatja.
A megoldás a bal oldali oszlop két sorából: △ = 34.

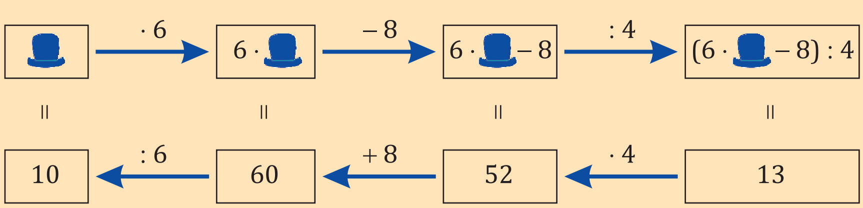
2. példa

Gondoltam egy számot. A 6-szorosánál 8-cal kisebb számot elosztottam 4-gyel, és 13-at kaptam. Melyik számra gondoltam?

Megoldás

Jelölje a gondolt számot a .

A szöveg alapján felírható az alábbi nyitott mondat: (6 ·  – 8) : 4 = 13.
Ismét a lebontogatás módszerével oldjuk meg a nyitott mondatot. A megoldást segíti az alábbi ábra.



A nyitott mondat megoldása  = 10.

Ellenőrzés: (6 · 10 – 8) : 4 = 13.
A folyamatábrából látjuk, hogy a megoldás során a szövegben megfogalmazott műveletek fordítottjával számoltunk:  = (13 · 4 + 8) : 6 = 10.

PÁROS MUNKA

A példákban láthattuk, hogy a visszafelé gondolkodás lényege az, hogy mindig az adott művelet „fordítottját" hajtjuk végre. Játsszatok a padtársaddal! Mondj egy műveletet, ő pedig mondja meg a fordítottját, aztán cseréljetek!

3. példa

Egy osztály előadásra ment a Szentendrei Szabadtéri Néprajzi Múzeumba. A belépő 800 Ft-ba, a megrendelt ebéd 1100 Ft-ba került, és ezen felül még az utazásra kellett költeni. Mennyi volt egy fő utazási költsége, ha a kiránduláson 22-en vettek részt, és összesen 58 300 Ft-ot szedtek be.

Megoldás

Jelölje egy tanuló utazási költségét .
Ekkor a szöveg alapján felírható nyitott mondat: ( + 800 + 1100) · 22 = 58 300.
Lebontogatással:  = 58 300 : 22 – 1100 – 800 = 750.
Egy fő utazási költsége 750 Ft volt.

Ellenőrzés:
Egy tanuló 750 + 800 + 1100 = 2650 Ft-ot, 22 tanuló 2650 Ft · 22 = 58 300 Ft-ot fizetett be.

4. példa

Egy gazda udvarán nyulak, kacsák és bárányok vannak. Tudjuk, hogy a nyulaknak összesen 42 fülük van. A kacsáknak és a bárányoknak összesen 54 lábuk és 21 fejük van.
Hány állat van az egyes fajtákból a gazda udvarán?

Megoldás

A nyulak száma a fülek számának fele: 42 : 2 = 21.
Nyitott mondattal is felírhatjuk: ☐ · 2 = 42, ☐ = 42 : 2.
A nyulak száma 21.
A kacsák és a bárányok számát **próbálgatással** keressük meg. Készítsünk olyan táblázatot, amiben a kétfajta állat együttes darabszáma 21, mivel minden állathoz 1 fej tartozik! Az egyes esetekhez kiszámítjuk a lábak számát.

Bárány	0	1	2	3	4	5	6
Kacsa	21	20	19	18	17	16	15
Lábak száma	42	44	46	48	50	52	54

A táblázatban láthatjuk, ha 1 kacsát lecserélünk 1 bárányra, akkor a lábak száma 2-vel nő. Ha a bárányok száma 6, a kacsáké 15, akkor a lábak száma 54. Más megoldás nem lehet, mert ha tovább növeljük a bárányok számát, akkor a lábak száma is nő.

Következtetéssel:
Vegyük figyelembe a kacsák szárnyát is.
Ezzel minden állathoz 4 végtag tartozik, összesen 21 · 4 = 84.
Ez a lábak számánál éppen a kacsaszárnyak számával több.
Tehát 84 – 54 = 30 a kacsaszárnyak száma. 30 szárnya 15 kacsának van.
A gazda udvarán 21 nyulat, 15 kacsát és 21 – 15 = 6 bárányt tartanak.

Ellenőrzés:
A nyúlfülek száma: 21 · 2 = 42. A bárányok és kacsák lábainak száma: 6 · 4 + 15 · 2 = 24 + 30 = 54.

Feladatok

1. Gondoltam egy számra. Találd ki, hogy melyikre!

a) A számnál 5-tel nagyobb szám a 7.
b) A számnál 9-cel kisebb szám a 11.
c) A számnál 2-vel nagyobb szám a 13.
d) A számnál 8-cal kisebb szám a 0.
e) A számnál 7-tel nagyobb szám a 0.
f) A számnál 6-tal kisebb szám a (–17).
g) A számnál 4-gyel nagyobb szám a (–2).
h) A számnál (–3)-mal kisebb szám a (–5).

2. Számold ki, kinek mennyi pénze van! Nézz utána az interneten, hol használják ezeket a pénznemeket!
Laci: Ha kétszer ennyi pénzem lenne, 800 forintom lenne.
Jancsi: Ha ötször ennyi pénzem lenne, 750 dollárom lenne.
Márk: Ha feleennyi pénzem lenne, 450 lejem lenne.
Levi: Ha harmadennyi pénzem lenne, 135 euróm lenne.

3. A 6. c-be járó fiúk hatalmas online csatát vívtak egymással a hétvégén. Még hétfőn is erről beszélgettek, ment a nagy hencegés. Számítsd ki, kinek mennyi aranytallérja volt a játék végén! Állítsd növekvő sorrendbe a fiúkat a szerzett aranytallérjaik alapján!
Kristóf: Ha másfél millióval többet szereztem volna, akkor 7,1 millió aranytallérral zártam volna a hétvégét.
Dani: Nekem annyi aranytallérom volt, hogy ha még 3,2 milliót vesztek, akkor is marad 2,9 millióm.
Palkó: Szerintem én álltam a legjobban, hiszen ha a vagyonom negyedét elajándékoznám, még mindig maradna 3,9 millió aranytallérom.
Marci: Szerintem a nyertes én lettem. Ha másfélszer annyi aranytallérom lett volna, mint amennyi vasárnap este volt, akkor a vagyonom már 8,7 millióra rúgna.

4. Varázsvilágban van egy óra, amin az időutazók be tudják állítani, hogy az időben előre vagy vissza pontosan mennyi időt szeretnének utazni. Az óra alapbeállítását a tanárok kezelik. Az idősebb varázslótanoncok titokban gyakran állítgatnak rajta, hogy megvicceljék az újoncokat és a tanárokat. Számítsd ki, milyen beállítások szerepeltek eredetileg az órákon!

a) Csiribú a beállított időt a négyszeresére tekerte, visszatekert 2 napot, majd harmadolta a megkapott időt. Így 6 napot utaztak az időben előre.
b) Hókusz a beállított időt megduplázta, visszatekert 4 napot, majd az egészet negyedelte. Így visszautaztak az időben 3 napot.
c) Abrakad a beállított időből elvett 3 napot, megfelezte, hozzáadott 1 hetet, és újra megfelezte. Így 1 napot utaztak az időben előre.

5. Egy állatkereskedés kirakatában papagájok és tengerimalacok vannak. Dávid 12 fejet és 36 lábat számolt össze. Hány papagáj és hány tengerimalac van a kirakatban?

6. A nagy családi bringatalálkozóra a felnőttek kétkerekű, a kisgyerekek háromkerekű biciklivel érkeztek. A vagány kamasz gyerekek mind kormány nélküli egykerekű biciklivel, úgynevezett monociklivel jöttek. A találkozón 58 kereket és 24 kormányt számoltak össze. A családban háromszor annyi felnőtt van, mint kisgyerek. Számítsd ki, hányan jöttek monociklivel a találkozóra!

7. Találj ki a lecke elején található Játék-hoz hasonló „trükköt”!

SZÖVEGES FELADATOK 10.

Szöveges feladatok megoldása során a sokféle adatra, a szövegre, az összefüggésekre és a kérdésekre is figyelni kell. Az ötödik osztályos könyvben összeírtuk a javaslatainkat a szöveges feladatok sikeres megoldásához.

Ezek a következők voltak:

1. *Gyűjtsd össze az adatokat! Mit ismerünk?*
2. *Tudatosítsd magadban, mit keresünk!*
3. *Ha szükséges, készíts ábrát, ami segít az összefüggések felismerésében!*
4. *Ha elakadtál, nézd meg, minden adatot, információt felhasználtál-e!*
5. *Ha kaptál egy eredményt, ne felejtsd el az ellenőrzést! Szöveges feladatnál mindig a szövegbe visszahelyettesítve ellenőrizz!*
6. *Válaszolj a feltett kérdésre!*

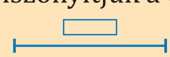
1. példa

Három testvér mindegyikénél van valamennyi pénz. Dórinál 200 Ft híján háromszor annyi, mint Balázsnál, Gergőé pedig Balázs pénzének kétszerese. Mennyi pénzük van a testvéreknek külön-külön, ha együtt 4600 Ft-juk van?

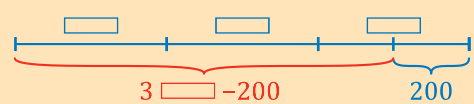
Megoldás

Készítsünk a szöveg alapján ábrát úgy, hogy Balázs pénzéhez viszonyítjuk a többiek pénzét.

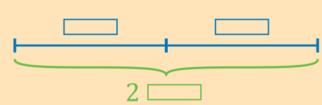
Balázs pénze:



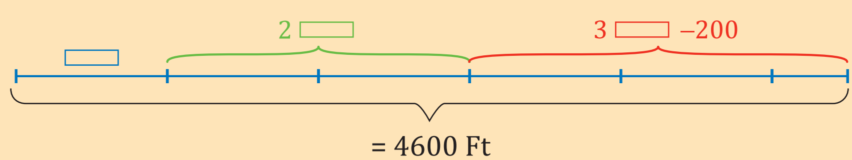
Dóri pénze: 200 Ft-tal kevesebb, mint Balázs pénzének háromszorosa.



Gergő pénze: Balázs pénzének kétszerese.



Ez összesen 4600 Ft.



Ha Dórinak adnánk 200 Ft-ot, akkor a három testvérnek 4800 Ft-ja lenne. Ez az összeg Balázs pénzének éppen a hatszorosa.
Ebből Balázs pénze 4800 Ft : 6 = 800 Ft.
Dórinak 3 · 800 Ft – 200 Ft = 2200 Ft-ja van.
Gergő pénze 2 · 800 Ft = 1600 Ft.

Ellenőrizzünk: 800 Ft + 2200 Ft + 1600 Ft = 4600 Ft.

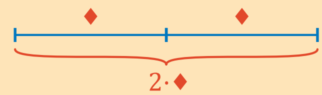
2. példa

Harry, Ron és Hermione születésnapi ajándékot vásárolnak Hagridnak. Az Abszol úti seprűboltban 95 galleonért kínálnak nagy teherbírású, drága seprűket. Harry kétszer annyit áldoz az ajándékra, mint Hermione, Ron pedig 5 galleonnal kevesebbet, mint Hermione. Mennyi pénzt ad be a három gyerek?

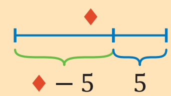
Megoldás

Ismét készítsünk olyan ábrát, amely segíti a megoldást!
Hermione beadott pénzéhez viszonyítjuk a többiek pénzét.
Hermione pénze: ♦

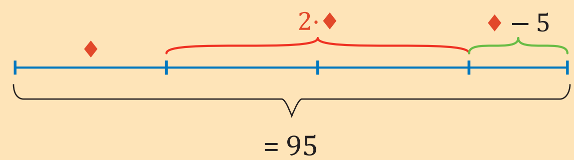
Harry kétszer annyit fizet be, mint Hermione:



Ron 5 galleonnal kevesebbet, mint Hermione:



Együttesen ki tudják fizetni a 95 galleont.



Hermione pénzének négyszeresénél 5-tel kevesebb a 95.

4 · ♦ – 5 = 95

Visszafelé következtetéssel ♦ = (95 + 5) : 4 = 25.

Hermione 25 galleont, Harry 2 · 25 = 50 galleont, Ron 25 – 5 = 20 galleont adott az ajándékra.
Ellenőrzés:
Megnézzük, hogy a három varázsló pénzének összege 95 galleon-e. 25 + 50 + 20 = 95.

3. példa

Egy gyümölcskereskedő hétfőn eladta az almakészletének a harmadát, kedden a maradék háromnegyed részét. Szerdára 15 kg alma maradt az üzletben.
a) A hétfő reggeli mennyiség hányad részét adta el kedden a kereskedő?
b) Hány kg alma volt a boltban hétfőn a nyitáskor?

Megoldás

a) Keddre az összes alma mennyiségének $\frac{2}{3}$ része maradt. Ha ebből elfogyott $\frac{3}{4}$ rész, akkor kedden az összes mennyiség $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ része fogyott el.

b) Hétfőn és kedden az összes alma $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ részét tudta eladni a kereskedő, így maradt $\frac{1}{6}$ rész. Mivel $\frac{1}{6}$ rész 15 kg, ezért hétfőn reggel hatszor annyi, azaz 15 kg · 6 = 90 kg alma volt a boltban.

Gondolkozzunk másképp!
Hétfőn a kereskedő eladta az almamennyiség $\frac{1}{3}$ részét.

Kedden eladta a megmaradt mennyiség $\frac{3}{4}$ részét. Megmaradt a második napi mennyiség $\frac{1}{4}$ része, amiről tudjuk, hogy 15 kg. Ezért kedden nyitáskor 15 kg · 4 = 60 kg alma volt a boltban.

60 kg az összes almamennyiség $\frac{2}{3}$ része, mivel hétfőn a mennyiség $\frac{1}{3}$ részét adta el a kereskedő. Ha $\frac{2}{3}$ rész 60 kg, akkor $\frac{1}{3}$ rész 30 kg-mal egyenlő. Így összesen 60 kg + 30 kg = 90 kg alma volt hétfőn reggel.

Ellenőrzés:

Hétfőn eladta a 90 kg $\frac{1}{3}$ részét, azaz 30 kg-ot.

Kedden eladta a maradék 60 kg $\frac{3}{4}$ részét, azaz $60 \cdot \frac{3}{4} = 45$ kg-ot. Így összesen 75 kg-ot adott el, és valóban 15 kg maradt.

4. példa

Kata, Balázs és Dani ajándékot készítettek a nagymamának karácsonyra. Az ajándék elkészítéséhez szükség volt papírra, ragasztóra, filctollra és szalagra. Kata a költségek felét, Balázs a 40%-át fizette. Daninak kevés a zsebpénze, ezért tőle csak 125 Ft-ot kértek.
Mennyibe kerültek az ajándék elkészítéséhez szükséges hozzávalók?

Megoldás

Kata a teljes összeg $\frac{1}{2}$ részét fizette, Balázs pedig a 40%-át, ami $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ résszel egyenlő.

Ketten együtt $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} = \frac{9}{10}$ részt fizettek.

Dani $\frac{1}{10}$ részt fizetett, ami 125 Ft.

A teljes összeg $10 \cdot 125$ Ft = 1250 Ft.

Ellenőrzés:
Kata a teljes összeg felét, azaz 1250 Ft : 2 = 625 Ft-ot, Dani a 40%-át, azaz 1250 Ft · 0,4 = 500 Ft-ot adott a hozzávalókhoz.
625 Ft + 500 Ft + 125 Ft = 1250 Ft.
A három gyerek összesen 1250 Ft-ért vásárolt kellékeket az ajándék készítéséhez.

Feladatok

1. Szorgos család bútorvásárlást tervez. Ahhoz, hogy meg tudják venni a 160 000 Ft-os bútort, a meglévő pénzük kétszeresét még 12 000 Ft-tal ki kell egészíteni.
a) Mennyi megtakarított pénzük van jelenleg?
b) Mennyi idő múlva tudják megvenni a bútort, ha minden hónapban félretesznek 25 000 Ft-ot?

2. A Múzeumkertben golyózó Pál utcai fiúktól a Pásztor testvérek golyókat raboltak. Nemecsektől és Richtertől ugyanannyit, Kolnaytól ennél 2-vel többet, Barabástól 4-gyel kevesebbet, összesen 30-at. Mennyi a Pál utcaiak vesztesége egyenként?

3. A Farkaskaland során Toldi Miklós nem számolta a perceket, amíg simogatta a farkaskölyköket. Amikor az anyafarkas szörnyű ordítással hátulról rátámadt, két perccel tovább viaskodott vele, mint amennyi időt a kölykök simogatásával töltött. A hím farkassal még a nősténynél is 3 perccel lassabban végzett. Összesen 13 percet időzött a nádasban a farkasoknál. Hány percig simogatta a kölyköket, illetve hány perc alatt végzett a két rátámadó bestiával?

4. Egy mély vízre figyelmeztető táblát tartó oszlop negyede a föld alatt, fele a vízben, 1 méter pedig a víz felett van. Milyen mélységű vízre figyelmeztet a tábla? Milyen hosszú az oszlop?

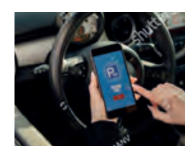
5. A 6. a osztály kosárlabdacsapata 66 pontot ért el az egyik mérkőzésén egy-, két-, illetve hárompontos dobásokból.
Az egy, két, illetve három pontot érő dobások számának aránya 2 : 3 : 1.
Hány egy-, két-, illetve hárompontos találatot ért el a csapat?

6. A mobilszolgáltatók kedvezménnyel jutalmazzák vásárlóik hűségét. Domonkos új telefont vásárol eddigi szolgáltatójától. Kétféle kedvezmény közül választhat.

- Új telefonja vételárából lebeszélhet 6000 Ft-ot, vagy
- 20% engedményt kap a vételárból.

Mekkora vételárig jár jobban Domonkos azzal, ha az első lehetőséget választja?

7. Egy fizetőparkoló díjszabása:
Az első óra: 400 Ft. Minden további megkezdett óra: 200 Ft.
a) Mennyibe kerül ebben a parkolóban egy 6,5 órás parkolás?
b) Mennyi ideig parkoltunk, ha 2400 Ft-ot fizettünk?



8. Nagymama pogácsáinak hatalmas sikere volt az unokák között. Magor együltő helyében felfalta a pogácsák negyedét, Kincső megette a maradék harmadát. A tálcán maradt 24 pogácsát az ikrek osztották szét igazságosan egymás között. Ki evett a legtöbbet a pogácsából?

9. Hunornak hétfőre meg kell tanulnia egy verset. Már pénteken nekiállt, és megtanulta a versszakok harmadát. Szombaton átismételte a pénteken tanultakat, és megtanulta a maradék versszakok háromnegyedét, így vasárnapra csak 4 versszak maradt. Hány versszakból áll a vers?

10. A sarki kézműves cukrászdát Boldi, Bali és Bende, a három jóbarát üzemelteti. A hétvégén rengeteg marcipánfigurát készítettek. Boldi elkészítette a figurák $\frac{3}{5}$ részét, Bali a 30%-át. Bende, miután kész lett az aznapi tortarendelésekkel, még gyorsan készített 14 marcipánmanót. Hány marcipánfigurát készítettek összesen?

11. A 2020-as karantén alatt a hatodikosok természetismeret-óráján projektmunkát kaptak. Egy videófilmet kellett készíteniük valamilyen általuk választott ház körüli életközösségről. Szabolcs vállalta a kisfilm vágását, így mindenki neki küldte a kertben készített fényképeket és rövid videófelvételeket. Szabolcsnak két napja maradt, hogy elkészüljön a pénteki leadási határidőre. Szerda délelőtt elkészült a film 35%-ával, délután a film $\frac{3}{8}$ részével. Csütörtökre még így is 99 másodpercnyi filmrészlet maradt. Hány perces lett Szabolcsék kisfilmje?

1. példa

Peti anyukája összehasonlította az ötös csomagolású Túró Rudi árát néhány élelmiszerbolt kínálata alapján.
Egy csomagot legolcsóbban 625 Ft-ért, legdrágábban 790 Ft-ért lehetett megvásárolni.
Mennyibe kerülhetett 1 darab Túró Rudi?

Megoldás

Jelöljük egy Túró Rudi árát így: $\square$. A legalacsonyabb árat az $5 \cdot \square = 625$ Ft nyitott mondat megoldásával kapjuk: $\square = 125$ Ft.
A legmagasabb ár az $5 \cdot \square = 790$ Ft nyitott mondat megoldásával kapható meg: $\square = 158$ Ft.
Egy darab Túró Rudi 125 Ft-ba vagy annál több pénzbe kerülhetett, de 158 Ft-nál nem lehetett magasabb az ára.

KUTATÓMUNKA

A Túró Rudit 1968-ban kezdték el gyártani a Szabolcsi Tejipari Vállalatnál, és mára az egyik legismertebb finomság lett Magyarországon. Nézz utána, van-e még olyan ország a világon, ahol árulnak a Túró Rudihoz hasonló édességet!

2. példa

Gondoltam egy pozitív egész számra. A szám háromszorosánál 5-tel nagyobb szám 52-nél nagyobb, de 70-nél kisebb.
Melyik egész számra gondolhattam?

Megoldás

Jelölje a számot $\blacksquare$.
A gondolt szám háromszorosánál 5-tel nagyobb szám: $3 \cdot \blacksquare + 5$.

Az első feltétel szerint $3 \cdot \blacksquare + 5 > 52$. Vizsgáljuk meg, hogy mikor lesz a $3 \cdot \blacksquare + 5 = 52$.

Lebontogatással megoldva $\blacksquare = (52 - 5) : 3 = \frac{47}{3} = 15\frac{2}{3}$.
A kapott számnál nagyobb egész számot keresünk. Ilyenek a 16, 17, 18…

A második feltétel szerint $3 \cdot \blacksquare + 5 < 70$. Vizsgáljuk meg, hogy mikor lesz a $3 \cdot \blacksquare + 5 = 70$.

A tanult módon megoldva: $\blacksquare = (70 - 5) : 3 = \frac{65}{3} = 21\frac{2}{3}$.
Most a kapott számnál kisebbet keresünk, ez lehet a 21, 20, 19…

Mindkét feltétel egyszerre több egész számra is teljesül. Ezek: 16, 17, 18, 19, 20, 21.
Ha több megoldást kapunk, akkor hosszú idő az összes megoldás ellenőrzése. Érdemes azonban egy-egy megoldást kiválasztani, és arra az ellenőrzést elvégezni.

Ellenőrzés:
Ha $\blacksquare = 16$, akkor $3 \cdot 16 + 5 = 53$, ami nagyobb, mint 52, és kisebb, mint 70. Megfelel a feltételeknek.
Ha $\blacksquare = 20$, akkor $3 \cdot 20 + 5 = 65$, ami szintén jó megoldás.

3. példa

Melyik az az egész szám, amelynél 3-mal kisebb szám hatodrésze legalább 2,1 és legfeljebb 3,3?

Megoldás

Jelölje a keresett számot 🏠!

A 3-mal kisebb szám hatodrésze $\frac{🏠 - 3}{6}$. Erről tudjuk, hogy legalább 2,1.

A legalább szó azt jelenti, hogy vele egyenlő vagy nála nagyobb, ezért vizsgáljuk meg, mikor lesz 2,1-del egyenlő.

$\frac{🏠 - 3}{6} = 2{,}1.$

Lebontogatással 🏠 $= 2{,}1 \cdot 6 + 3 = 15{,}6.$

A keresett szám 15,6, vagy annál nagyobb.

Azt is tudjuk, hogy $\frac{🏠 - 3}{6}$ legfeljebb 3,3. Ez azt jelenti, hogy 3,3, vagy annál kisebb.

A már látott módon nézzük meg, mikor lesz pontosan 3,3.

$\frac{🏠 - 3}{6} = 3{,}3.$

🏠 $= 3{,}3 \cdot 6 + 3 = 22{,}8$

A keresett szám 22,8, vagy annál kisebb.

A kapott két eredményt összevetve, a keresett szám legalább 15,6 és legfeljebb 22,8.

Ellenőrizzük például a 21-re és a 24-re. A 21 esetében igaz állítást várunk, a 24 esetében pedig hamisat.

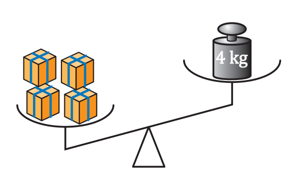
$\frac{21 - 3}{6} = 3$, ez valóban megfelel a feltételeknek, nagyobb, mint 2,1, és kisebb, mint 3,3.

$\frac{24 - 3}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$, ami nem felel meg a feltételnek, mert nagyobb, mint 3,3.

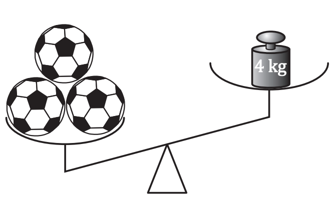
A keresett egész számok: 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22.

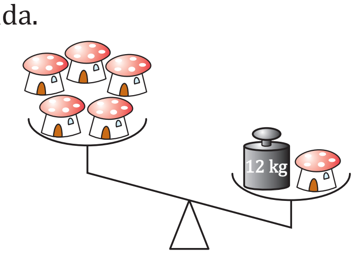
Feladatok

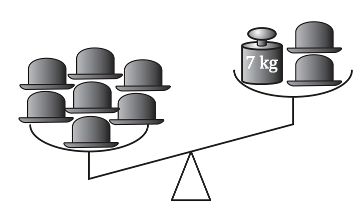
1. A kétkarú mérlegünkről csak azt tudjuk leolvasni, hogy egy adott súlynál könnyebbek vagy nehezebbek a mérleg serpenyőjébe rakott tárgyak. Állapítsd meg az ábrán látható tárgyak tömegét! Segít a példa.




> 1 kg







2. Melyek azok az egész számok, amelyekre teljesül, hogy
a) a kétszeresük nagyobb, mint 10?
b) a háromszorosuk kisebb, mint 21?
c) az ötszörösük nagyobb, mint (–2)?
d) a nyolcszorosuk kisebb, mint (–4,8)?

3. Melyek azok az egész számok, melyekre teljesül, hogy
a) a kétszeresük nagyobb, mint 6, de kisebb, mint 12?
b) a négyszeresük kisebb, mint 24, de nagyobb, mint (–8)?
c) a hétszeresük nagyobb, mint (–28), de kisebb, mint 8,4?
d) a kilencszeresük kisebb, mint (–40,5), de nagyobb, mint 36?

4. Gondoltam egy egész számra.
a) A számnál öttel nagyobb szám fele legalább 9, de legfeljebb 11. Melyik számra gondolhattam?
b) A szám háromszorosánál eggyel nagyobb szám fele legalább (–3), de kisebb, mint (–1). Melyik számra gondolhattam?
c) A szám négyszeresénél hárommal kisebb szám nagyobb, mint 13, de kisebb, mint 11. Melyik számra gondolhattam?
d) Mely esetekben tudtad biztosan eldönteni, mire gondoltam?

5. A régi négyszemélyes sífelvonó kabin legfeljebb 380 kg-mal terhelhető. Négy jóbarát a felvonó előtt azon tanakodik, vajon beszállhatnak-e együtt a kabinba. Egy ember sífelszerelése (bakancsok, sílécek, síbotok, sisak, síruha) körülbelül 8,5 kg. Dávid 82 kg, Gergő 78 kg és Pisti 92 kg tömegű. Legfeljebb hány kg lehet Andris tömege, hogy együtt beszállhassanak a kabinba?

6. Matyi hétfőn a 17. oldalon tartott a 132 oldalas *Ábel a rengetegben* című könyvben. Ha keddtől naponta 24 oldalt olvas, akkor melyik napon fejezi be a könyvet?

7. Hány oldalt kellene Matyinak naponta elolvasnia, ha a 129 oldalas *Ábel az országban* regénynek négy nap alatt akar a végére jutni?

8. Zsófit megbízták azzal, hogy a piacon szerezzen be sárgabarackot. 4100 Ft-ot költhet el. Zsófi felmérte, hogy 1 kg barack ára 380 Ft és 550 Ft között mozog. Egészekre kerekítve add meg a választ a kérdésekre!
a) Legalább hány kilogramm barackot vehet Zsófi?
b) Legfeljebb hány kilogramm barackot vehet Zsófi?
c) Zsófi minden pénzét elköltötte. Hány kg barackot vett, ha csak a legolcsóbból és a legdrágábból vásárolt?

9. Erika 300 forinttal ment le a pékségbe. Egy zsömle 15 Ft és egy sajtos pogácsa 100 Ft. Hány zsömlét és hány pogácsát vehetett, ha tudjuk, hogy mindkettőből vett legalább egyet, és kapott vissza valamennyi pénzt?

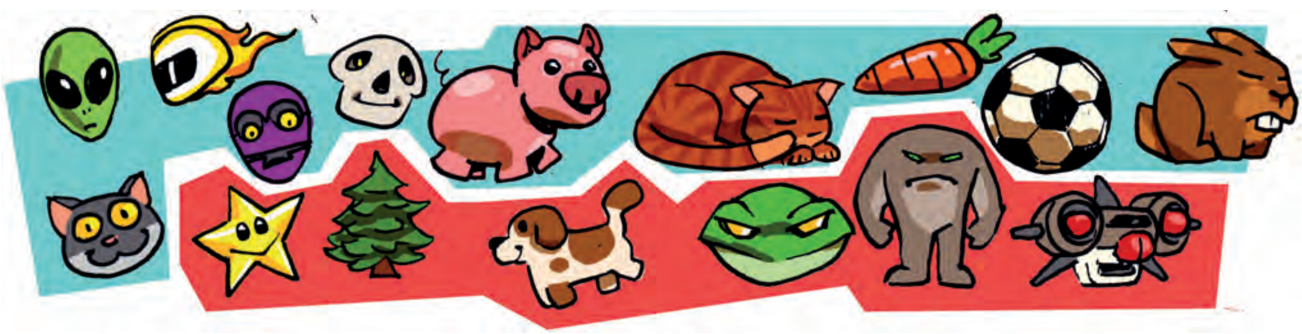
Létraverseny II.

Miután a csapat sikeresen feljutott a létrán, és megfejtette a titkos kód első három számjegyét, újabb próbatétel, egy új létra állt előttük. Már rutinosan keresték az útmutatót. A gyerekek izgatottan csavarták szét a feladványt rejtő papiruszt, és lelkesen belevetették magukat a remélhetőleg utolsó kihívásba. Nektek sikerülne? 30 percetek van rá, hogy megfejtsétek a kód befejező két számjegyét. Próbáljátok ki! Az előző létrarejtvényt a 145. oldalon találod.

1. Összeadtuk 0,1 km 4%-át, 1 m 142%-át és 1 dm 80%-át. Hány cm-t kaptunk? Jelölje a mérőszámot a ♥ jel!
2. Egy nagyon drága telefon ♥ euróba került. A telefon az első évben 20%-ot vesztett az értékéből, majd a következő évben a már csökkent árából vesztett újabb 30%-ot. Hány euróval ér kevesebbet így ez a telefon? Jelölje az eredményt a ▶ jel!
3. A tegnapi 16,2 km-es túránkat ▶ perc alatt tettük meg. 2 perc alatt sétáltunk ki a szállásunktól az erdőszélre, a maradék időnk 85%-át az erdőben túrázva töltöttük, végül körbesétáltunk egy gyönyörű hegyi tavacskát. Hány percbe telt megkerülni a tavat? Jelölje az eredményt a ✖ jel!
4. A gonosz király megharagudott alattvalóira, és az országban kapható minden termék árát 50%-kal megemelte. Két nap múlva elszállt a mérge. Kihirdette, hogy visszaáll a régi rend. Az összes termék árát 50%-kal csökkentette, hogy visszakapja az eredeti árakat. Az emberek némán csodálkoztak, az udvari bolond meg hangosan kacarászott. Mennyibe kerül most, a kétszeri árváltozás után egy eredetileg ✖ fabatkába kerülő sajtreszelő? A sajtreszelő árát jelölje a ✔ jel!
5. Gondoltam egy számra, jelöljük ✿-vel! Elvettem belőle 12-t, elosztottam 3-mal, elvettem belőle (–5)-öt, vettem az 50%-át, hozzáadtam az 51 harmadát, így a ✔ számot kaptam. Számítsd ki, milyen szám áll a ✿ jel helyén!
6. Messzire hallatszott a szirt tetején álló barlangból a ✿ darab szörny üvöltése. A szörnyek kétharmada zork volt, a többi pedig ork és mork. Te talán nem tudod, de az orkok 2 fejű és 3 lábú, a morkok 3 fejű és 5 lábú lények. A királyfi bátor hadserege, miután lekaszabolta a barlangból kimerészkedő összes zorkot, a halványan látszódó árnyékok alapján 44 fejet számolt össze. Hány ork volt a barlangban? **Ez a szám a kód utolsó két számjegye.**

Megmenekültetek? Gratulálunk! Mi lett végül a titkos kód?

Ebben a fejezetben megtanultuk az arány fogalmát.
Az arány két szám vagy két mennyiség összehasonlítása. Két szám vagy két mennyiség aránya azok hányadosával egyenlő.
Arányos osztást akkor végzünk, ha egy számot vagy mennyiséget megadott arányban felosztunk. Arányos osztásnál az arányszámokat összeadjuk, és a megadott számot vagy mennyiséget ezzel a számmal elosztjuk. Ekkor az egy részre jutó számot vagy mennyiséget kapjuk. Ha ezt megszorozzuk a megadott arányszámokkal, akkor megkapjuk a megadott szám vagy mennyiség arányos felosztását.
Például osszunk el 16 matricát 3 : 5 arányban!
3 + 5 = 8 részre osztjuk a 16-ot.
16 : 8 = 2, tehát 1 rész 2 db, 3 rész 6 db, 5 rész 10 db.



Az egyenes arányosságra igazak az alábbi kijelentések:

A. Ha két mennyiség közül az egyiket valahányszorosára változtatva a másik mennyiség ugyanannyiszorosára változik, akkor közöttük egyenes arányosság áll fenn.
B. Az összetartozó értékek hányadosa állandó, kivéve a (0; 0) számpárt.
C. Ha ábrázoljuk az összetartozó értékeket koordináta-rendszerben, akkor a pontok egy olyan egyenesre illeszkednek, amelyik áthalad az origón.

Egy szám vagy mennyiség törtrészét a törttel való szorzással számíthatjuk ki.

2400-nak a $\frac{3}{8}$ része $2400 \cdot \frac{3}{8} = 900$.

Megismertük a százalék fogalmát. A százalék századrészt jelent.

$1\% = \frac{1}{100}$, ezért egy szám vagy mennyiség adott százalékát a törtrész meghatározásával számíthatjuk ki.

7600-nak a 30%-a egyenlő a 7600 $\frac{30}{100}$ részével, ami $7600 \cdot \frac{30}{100} = 2280$.

A százalékot gyakran írjuk át tizedes tört alakra: 30% = 0,30.
Ennek alkalmazásával 7600 30 %-a: $7600 \cdot 0{,}30 = 7600 \cdot 0{,}3 = 2280$.

A nyitott mondatok megoldásának gyakorlása előkészíti a szöveges feladatok megoldását.
A szöveges feladatok megoldásához javaslatokat olvashattatok a 10. lecke elején. Lapozzatok vissza, és olvassátok el újra!

Feladatok

1. Győző 6 órán keresztül hordott fát a kamrába, Viktor csak 2 órán keresztül. Összesen 6000 forintot kaptak a tűzifa behordásáért.
a) A munka hányad részét végezte el Győző, illetve Viktor?
b) Hányszor annyi munkát végzett Győző, mint Viktor?
c) Oszd el a 6000 forintot a két fiú között munkájuk arányában!

2. Egy recept szerint a bodzavirágszörphöz 45 dkg bodzavirág, 3 liter víz, 6 dkg citromsav és 1 db szeletelt citrom kell. Néhány napig állni hagyjuk, majd leszűrjük. Hozzáadunk 3 kg cukrot, és ha szükséges, akkor annyi vizet, hogy összesen 6 liter legyen az elkészített szörp mennyisége.
a) Hány darab citrom kell 24 liter szörp elkészítéséhez?
b) Mennyi virágot rakjunk 9 liter vízbe?
c) 180 dkg virágot szedtünk. Ehhez mennyi citromsav szükséges?
d) Van otthon 6 darab citrom, 30 dkg citromsav. Hány dekagramm virágot szedjünk? Citromból vagy citromsavból lesz-e maradékunk?

3. Egy lakás havi közös költsége 10 950 Ft.
a) Mennyi közös költséget fizet az ott lakó család egy év alatt?
b) Egyszer egy összegben befizettek 54 750 Ft-ot. Ez hány havi költség kifizetését jelentette?

4. Ha a 2,4 kg cukoroldatban 96 gramm cukrot oldottunk fel, akkor 0,5 kg oldatban hány gramm cukor van?

5. Öt ládában 90 darab alma található. Ugyanilyen méretű almák és ládák esetén
a) hány darab alma van 13 ládában;
b) hány ládába csomagolható 306 darab alma?

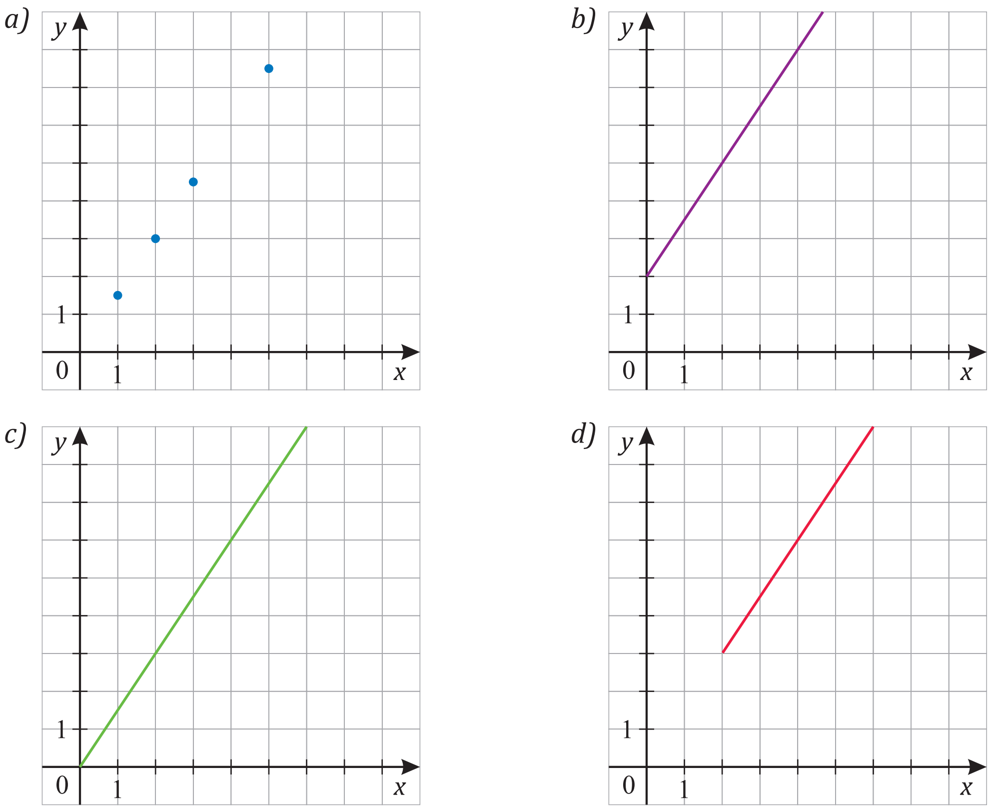
6. Az osztálykirándulásra 14-en már befizették a pénzt, összesen 224 000 Ft-ot. Ha 25 fős az osztály, akkor még hány forint hiányzik a teljes összeghez?

7. Egy távolsági autóbusz 12 perc alatt 12 km-t tesz meg. Ha átlagosan ezt a sebességet tartja, akkor
a) 1 óra alatt mekkora utat fog megtenni?
b) 72 km-t mennyi idő alatt tesz meg?

8. Ha 3 m^2-re 54 virágpalántát ültettek a kertészek, akkor egy 14 m^2-es területre hány palántát fognak ültetni?

9. Nézz utána, hogy mennyi a tengerek átlagos sótartalma!
A Holt-tenger vize annyira sűrű, hogy az emberi test lebeg rajta. Ennek oka a magas, 30% körüli sótartalom.
a) Keresd meg térképen a Holt-tengert!
b) Hogyan állítanál elő otthon holt-tengeri vizet?
c) Egy átlagos méretű 150 literes fürdőkádba mennyi sót kellene tölteni, hogy úgy lebegj benne, mint a Holt-tengerben?

10. Melyik ábrán láthatunk egyenes arányosságot szemléltető grafikont?



11. Egy kerék 18 fordulattal 32,4 métert tesz meg.
a) Hány métert gurul a kerék 29 fordulattal?
b) Hányszor fordult a kerék, miközben 45 métert haladt előre?

12. Írd fel a felsorolt törtrészeket százalékos alakban!

0,1; 0,2; 0,25; 1; $\frac{12}{100}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{12}{10}$; $\frac{12}{20}$; $\frac{12}{5}$; $\frac{99}{100}$.

13. Számítsd ki
a) 120-nak a 30%-át; *b)* 1200-nak a 10%-át; *c)* 16-nak a 300%-át; *d)* 40-nek a 40%-át!

14. Gáspár kinőtt nadrágja helyett újat kellett venni. Szerencsére téli leértékelés volt, és a 6800 Ft-os nadrágot 30% engedménnyel vehették meg. Mennyibe került a nadrág?

15. Egy kereskedő 600 kg almát tárolt téli eladásra. Egy hónap múlva megmérte a gyümölcsöt, és azt tapasztalta, hogy a kiszáradás miatt 1,5%-ot veszített a tömegéből. Ekkor úgy döntött, hogy eladja az almát. Hány kg-ot értékesíthetett?

16. Számítsd ki, hogy ha egy 10 000 Ft-os termék árát kétszer egymás után 40%-kal csökkentik, akkor mekkora lesz a végső ár!

17. Egy szálloda 150 férőhelyes. Kihasználtsága 72%-os.
a) Hány fő van a szállodában?
b) A vendégek két-, három- és négyágyas szobákban laknak. Minden kiadott szobában annyi vendég van, ahány ágyas a szoba. A kiadott szobák között hány van az egyes típusokból, ha a kétágyas, a háromágyas és a négyágyas szobákban lakó vendégek számának aránya 3 : 4 : 2?

18. Gondoltam egy számra, a nyolcszorosából kivontam 5-öt, végül elosztottam 3-mal. Eredményül 17-et kaptam. Melyik számra gondoltam? Írd fel a megfelelő nyitott mondatot, oldd meg lebontogatással!

19. Egy szálloda három épületében összesen 407 vendéget helyeztek el. Az első épületben 10 vendéggel több van, mint a harmadikban, a harmadikban pedig 8 vendéggel több van, mint a másodikban. Hány vendég lakik az egyes épületekben?

20. A Habzsi családhoz vendégek jönnek, ezért reggel meggyes és csokis sütit sütöttek, összesen 80 darabot. A vendégek késtek, a Habzsi család pedig várakozás közben megette a meggyes sütik harmadát és a csokis sütik felét. Így a kétféle sütiből összesen 46 darab maradt.
a) Hányad része maradt meg a meggyes süteménynek?
b) Hányad része maradt meg a csokis süteménynek?
c) Hányad része maradt meg az összes süteménynek?
d) Hány darab meggyes süteményt sütöttek?
e) Hány darab csokis sütemény maradt a vendégeknek?

21. Matyi és Viktor ugyanannyi focis matricát vásárolt.
Mire Matyi beragasztotta a matricák $\frac{1}{7}$ részét, addigra Viktor már négyszer annyi matricát ragasztott be a gyűjtőalbumba.
Matyi: Nekem kétszer annyit kell még beragasztanom, mint neked.
Viktor: Nekem már csak 12 matricát kell beragasztanom.
a) Matyi matricáinak hányad része maradt meg?
b) Viktor matricáinak hányad része maradt meg?
c) Hány matricája maradt meg Viktornak?
d) Hány matricát vettek eredetileg a fiúk?

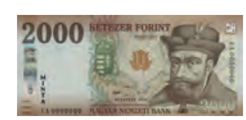
22. Az Árpád-házi királyokról rendezett történelemverseny előtt Hisztoria tanár néni kiadott néhány olvasmányt a gyerekeknek. Adél vállalta a harmadát, Berci a maradék $\frac{3}{7}$-ét, Csongor pedig a maradék 8-at.
a) Hányad részt vállalt Berci az összes olvasmányból?
b) Hányad rész maradt Csongorra?
c) Hány olvasmányt adott ki a gyerekeknek összesen a tanárnő?

23. Egy 100 m^2-es felület burkolását két brigád végzi el. Az egyikben 3 munkás 24 m^2 felületet burkolt le, a másikban 5 munkás 76 m^2-t. Az egész munka 200 ezer Ft-ot ér. Mennyit kapnak az egyes munkások, ha a pénzt a brigádok között
a) a létszámuk arányában;
b) az elvégzett munka arányában osztjuk szét?
Szerintetek melyik elosztás igazságosabb?

24. A középkori kolostorokban az éjszaka múlását gyertyaórával mérték, kihasználva, hogy egy egyenletesen égő gyertyából azonos idő alatt azonos magasságú viaszoszlop olvad le.
A gyertyaóra alkalmas időzítésre is, akár egy ébresztőóra. Mindössze egy szöget kell a gyertyába szúrni abban a magasságban, ahol a gyertya égni fog a kívánt időpontban, és egy fémtálat aláhelyezni. Így amikor a gyertya a szögig leég, vagyis a „beállított” időpontban a szög kiolvad, nagy csattanással a tálkába esik, jelezve, hogy ideje felkelni.
Mikor „ébreszt” a képen látható gyertyaóra? (PISA 2009. 36. feladata: gyertya)

25. Számítsd ki 60 percnek mennyi
a) a 150%-a; *b)* a 200%-a; *c)* az 50%-a; *d)* a 2400%-a!

26. Zsebpénzemből megtakarítottam 2000 Ft-ot. Úgy döntöttem, hogy veszek belőle valamit magunknak. A pénz 20%-áért vettem egy nagy csokit az öcsémnek. A többi pénz 35%-ából vettem egy illatos gyertyát a nővéremnek, és 200 Ft-ból vettem magamnak egy csomag rágót. A maradék pénzből egy nagy doboz müzlit vásároltam, amit mind a hárman nagyon szeretünk. Hány forintba került a müzli?



27. Anna: 1500 Ft-tal több pénzem van, mint neked.
Zita: Ha még egyszer annyit gyűjtök, mint amennyi pénzem most van, akkor is csak feleannyi pénzem lesz, mint neked most van.
Mennyi pénze van Annának és Zitának?

28. A hetedikesek megkérdezték a matektanárukat, hány évesek a gyerekei. A tanárnő a következőt válaszolta: Két gyerekem van. Peti tavaly háromszor annyi idős volt, mint Sanyi, de jövőre már csak kétszer annyi idős lesz. Hány éves Peti? Hány éves Sanyi?

Kutatómunka

Egy háztartásban naponta átlagosan 1,5-2 kg hulladék termelődik.
Nézz utána, hogy a háztartásokban termelt hulladéknak hány százaléka az újrahasznosítható papírhulladék!
Hányad része az újrahasznosítható műanyaghulladék?
Mekkora része komposztálható az összes háztartási hulladéknak?
Ha egy család minden hulladékot szétválogatva gyűjt, mennyi fel nem használható szemétmennyiség marad 1 napi hulladékból?

Nyomozás

Joker vegyészének sikerült olyan mérget kevernie, amelyik mindenkit butává tesz. Tudjuk, hogy a keveréknek három alkotórésze van: számusz, geomusz és probusz. A három összetevő keveréke csak akkor veszélyes, ha az egyes alkotórészek aránya 2 : 4 : 5. A rendőrségnek sikerült nyolc gyanúsítottra szűkíteni a kört. Segíts nekik kinyomozni a tettest!

1. Akinél nem a keverékhez szükséges arányban talált anyagot a rendőrség a házkutatás során, az nem lehetett a tettes.

Gyanúsított	1	2	3	4	5	6	7	8
Számusz (kg)	6	10	1	1	10	4	2	0,5
Geomusz (kg)	12	20	2	2	15	8	4	1
Probusz (kg)	15	25	5	2,5	25	10	5	2,5

2. A rendőrségnek az is tudomására jutott, hogy a vegyésznek pénzre volt szüksége, ezért ellenőrizték a gyanúsítottak bankszámláit. Azt a két embert, akinek a legtöbb pénze volt, ki lehetett zárni.

Gyanúsított	Bankszámla
1	600 000
2	20%-kal kevesebb, mint az 1-es gyanúsítotté.
3	200%-kal több, mint a 8-as gyanúsítotté
4	10%-kal több, mint a 2-es gyanúsítotté.
5	50%-kal több, mint a 7-es gyanúsítotté.
6	80%-kal kevesebb, mint a 2-es gyanúsítotté.
7	20%-kal kevesebb, mint a 6-os gyanúsítotté.
8	75%-kal kevesebb, mint az 1-es gyanúsítotté.

3. A merénylő pulóveréből egy kisebb anyagdarab kiszakadt, amikor terepszemlét tartott a városi víztározónál. Ezt a helyszínelők megtalálták. Az anyag összetétele 80% pamut, 15% műszál és 5% len. A gyanúsítottak ruhájából vett mintákat különböző szakemberek vizsgálták, és az alábbi eredményeket adták meg. Azt a két gyanúsítottat, akinek a ruhája más összetételben tartalmazta a felsorolt anyagokat, ki lehetetett zárni.

Gyanúsított	1	2	3	4	5	6	7	8
Pamut	0,8	$\frac{4}{5}$	400	0,8	$\frac{32}{40}$	80	$\frac{4}{5}$	16
Műszál	0,15	$\frac{1}{20}$	75	0,15	$\frac{6}{40}$	15	$\frac{3}{20}$	3
Len	0,05	$\frac{3}{20}$	25	0,5	$\frac{2}{40}$	5	$\frac{1}{20}$	1

4. Átvizsgálták a gyanúsítottak számítógépét is. Akinek a böngészési előzményeiben a legkisebb arányban szerepeltek a butító méreghez kapcsolódó lapok, azt ki lehetett zárni.

Gyanúsított	1	2	3	4	5	6	7	8
Arány	0,10	$\frac{1}{10}$	0,15	0,12	20%	0,05	18%	$\frac{1}{5}$

Melyik gyanúsítottat nem zárta ki a rendőrség?

V. Kerület, terület, felszín, térfogat

– Valami baj van? – kérdezte Panni Attilát, aki aggodalmas arccal nézte a monitort.

– Nem baj, inkább csak számítanunk kell egy kis kellemetlenségre – fordult felé a fiú. – A következő állomásunk a Varea-tér, és az eddigi tapasztalatok alapján történhetnek furcsaságok, amíg átjutunk a bolygó légkörén. Ne aggódjatok, ez csak egy látszólagos jelenség, és pár perc alatt el is fog múlni.

– Hupsz! – hallatszott Zsombor felől, aki nagyon furcsa arcot vágott.

Szó szerint egyre nagyobbra kerekedő szemmel nézték, ahogy Zsombor minden irányban növekedni kezdett. Mire kétszer akkorának látszott, addigra már nyolcszoros lett a térfogata, és a többiek elhűlve csodálkoztak rá igencsak megszélesedett vállaira.

– Jujj, neee! – sikkantott Zsuzsi, aki lassan, de megállíthatatlanul szintén terebélyesedni kezdett.

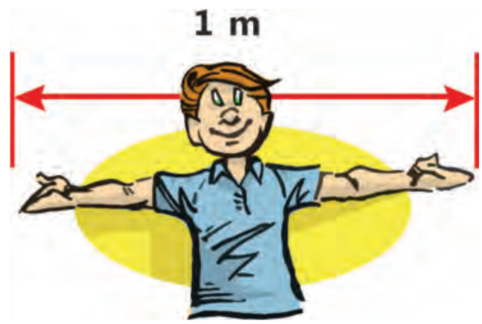
Attila már csak kuncogott, amikor látta saját magán, hogy virsli méretűre duzzadnak az ujjai.

Panni járt a legrosszabbul, de mégis ő gyógyult leggyorsabban. Először majd háromszorosra puffadt a teste, majd szép lassan lelappadt, mire leszálltak a bolygó űrkikötőjében. Miközben kimasíroztak a hajóból, még egy ellenőrző pillantást vetett a panorámaablak tükröződő felületére, és elégedetten bólintott. Úgy érezte, egy nagyon picit mintha gömbölyűbb maradt volna, mint korábban volt.

1. HOSSZÚSÁG, TÖMEG, IDŐ

A méréseknek nagyon fontos szerepe van az életünkben, ezt az előző években is láttuk. Utazáskor fontos adat, hogy milyen messzire szeretnénk eljutni, sütésnél-főzésnél megmérjük az alapanyagok tömegét, egy futóversenyen pedig nélkülözhetetlen az idő mérése. Felelevenítjük, hogy mit tanultunk a mérésekkel kapcsolatban.

Méréskor a mérendő mennyiséget összehasonlítjuk a választott egységgel. A **mennyiség** **mérőszám**ból és **mértékegység**ből áll. Például: 5 dm, 7 dkg, 10 h, 8 cm^2, 1,3 mm^3, 3 dl, 45°.



A mértékegységek többszöröseit **előtag**gal fejezzük ki.

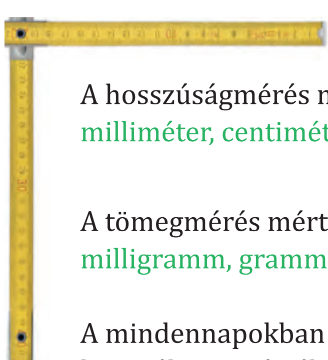
kilo	1000	k
mega	1 000 000	M
giga	1 000 000 000	G
tera	1 000 000 000 000	T

Például a kilogramm a gramm ezerszeresét, a megatonna a tonna milliószorosát jelenti.

A **gramm tízszeresét** a **deka-** előtaggal (dekagramm, dkg), a **liter százszorosát** a **hekto-** előtaggal (hektoliter, hl) fejezzük ki.

A mértékegységek törtrészét is **előtag**gal fejezzük ki.
A **liter** és a **méter tizedé**t a **deci-** előtaggal, **századát** a **centi-** előtaggal fejezzük ki.
Nem kapcsolunk előtagot a fok, az év, a hónap, a hét, a nap, az óra, a perc és a másodperc mértékegységekhez.

deci	0,1	d
centi	0,01	c
milli	0,001	m
mikro	0,000 001	µ
nano	0,000 000 001	n
piko	0,000 000 000 001	p



A hosszúságmérés mértékegységei:
milliméter, centiméter, deciméter, méter, kilométer.

1 mm < **1 cm** < **1 dm** < **1 m** < **1 km**

· 10 · 10 · 10 · 1000

A tömegmérés mértékegységei:
milligramm, gramm, dekagramm, kilogramm, tonna.

1 mg < **1 g** < **1 dkg** < **1 kg** < **1 t**

· 1000 · 10 · 100 · 1000

A mindennapokban a mázsa (q) is használatos mértékegység: 100 kg = 1 q.

Az idő mérésének mértékegységei:
másodperc, perc, óra, nap, hét, hónap, év.

1 s **1 min** **1 h** **1 nap** **1 hét** **1 hónap** **1 év**

· 60 · 60 · 24 · 7

A hónapok különböző hosszúságúak.
28 (szökőévekben 29) napos hónap: február.
30 napos hónapok: április, június, szeptember és november.
31 napos hónapok: január, március, május, július, augusztus, október, december.
Egy év 365 nap (illetve 366 nap) hosszúságú.

Megkülönböztetünk **időpont**ot és **időtartam**ot.
Az óra mutatja az időpontot. Az időtartam pedig a két időpont között eltelt idő.

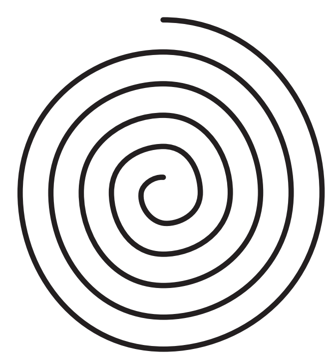
Feladatok

1. Keresd az egyenlőket!

a)	0,18 km	180 cm	180 m	1800 mm;
b)	2,4 t	240 kg	24 000 dkg	2 400 000 g;
c)	3,6 h	3600 s	216 perc	0,216 nap.

2. Becsüld, majd mérd meg az itt látható vonal hosszát! Mekkora volt az eltérés a becslés és a mérés között? Milyen mértékegységben célszerű megadni a vonal hosszát?

3. Mérd meg, hogy milyen hosszú az ábrán látható vonal! Add meg milliméterben, centiméterben és deciméterben is a hosszát! Milyen eszközzel érdemes megmérni ezt a vonalat?



4. Még napjainkban is találkozhatunk az inch (hüvelyk, col) hosszúságegységgel, bár már nincs a hivatalosan elfogadott egységek között. Tudjuk, hogy 1 inch = 1 hüvelyk = 1 col ≈ 2,54 cm.

a) Egy televízió tájékoztató füzetében olvasható, hogy képernyőjének átlója 26 col. Hány centimétert jelent ez? A tietek otthon nagyobb vagy kisebb ennél?

b) A kerékpár kerékátmérőjét a használó testmagasságához kell választani. Ezzel kapcsolatban a következő táblázatot találtuk:

Testmagasság (cm)	Javasolt kerékátmérő (inch)
75–90	12
90–110	14
110–120	16
120–135	20
135–150	24
150–	26

Add meg milliméterben az egyes kategóriákhoz tartozó kerékátmérőket! Neked mekkora kerékátmérőjű bicaj ajánlott?

c) A mesebeli Hüvelyk Matyi nagyon kicsi volt. Hány centiméter magas Nagy Matyi, ha 68 hüvelyk a magassága?

5. A konyhai digitális mérlegek gyakran grammban mérik a rájuk helyezett dolgok tömegét. A képen látható citrom 156 gramm.
Hány grammot kell mérni az egyes összetevőkből a mérlegen, ha a szakácskönyv a gombóc tésztájához ezt írja: 1,5 kg burgonya, 60 dkg liszt, 8 dkg cukor, 2 tojás, 2 evőkanál zsír?

6. A 140 grammos csokoládékat 12-esével csomagolják. Egy bolt 45 csomaggal rendelt belőle. Hány kilogramm lesz ez? (A csomagolás tömege elhanyagolható.)

7. Egy kis boltban 30 grammos csomagokban fűszerkeverék, 12 grammos csomagokban pedig zöldbors kapható. Összesen 25 csomag van a polcon.
a) Milyen határok között mozoghat a 25 csomag tömege? Add meg dekagrammban!
b) Ha ezek tömege összesen 73,2 dkg, akkor melyikből mennyi van a polcon?

8. A következő mennyiségeket add meg másodpercben, percben és órában!
a) 5 h; *b)* 25 h; *c)* 90 perc; *d)* 130 perc;
e) 5400 s; *f)* 1800 s; *g)* 0,5 h; *h)* 0,25 h.

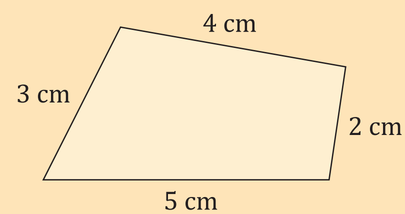
9. Edelényben felújították a kastélyt – olvashattuk, hallhattuk a híradásokban.
Szeretnénk vonattal Budapestről Edelénybe utazni. Megtudtuk, hogy az indulási időpont 8:30, az érkezés 11:43. Hány percet töltünk vonaton, ha a menetrend szerint Miskolcon 39 percünk lesz az átszállásra?

10. A pékségben fél kilogrammos, 750 grammos és 1 kilogrammos kenyereket árulnak. Az egyik boltba 20, 24 és 40 darabot rendeltek, csak elfelejtettük, hogy melyikből mennyit.
a) Minimum hány kilogramm kenyeret kell a boltba szállítanunk, hogy a rendelést a helyszínen teljesíteni tudjuk?
b) Hány kilogramm lehetett a megrendelt mennyiség?

A téglalap határvonalának hosszát, vagyis a kerületét, már tavaly meghatároztuk. A kerület hosszúságot jelent, *k*-val vagy *K*-val jelöljük.
A **téglalap kerülete** az oldalak hosszának összegével egyenlő.
A négyzet minden oldala egyenlő hosszúságú, ezért a **négyzet kerülete** egyenlő az oldal hosszának négyszeresével.

1. példa

Megadtuk az ábrán látható négyszög oldalainak hosszát. Milyen hosszú vonalat húztunk, amikor megrajzoltuk a négyszöget?



Megoldás

Járjuk végig gondolatban a négyszöget! Jegyezzük le, hogy milyen hosszú oldal mentén haladtunk a ceruzánkkal! Így megkapjuk a vonal hosszát, vagyis a négyszög kerületét: $K = 4\text{ cm} + 3\text{ cm} + 5\text{ cm} + 2\text{ cm}$.
Ezeket a hosszúságokat összeadjuk, és készen vagyunk: $K = 14\text{ cm}$.
Ezt rövidebben így is írhatjuk: $K = 4 + 3 + 5 + 2 = 14\text{ (cm)}$.
Mivel közben nem írtuk ki a mértékegységet, a sor végén csak zárójelben jelezzük, hogy végig centimétert használtunk.

A síkidom kerületének meghatározása a határvonal hosszának megadását jelenti.
A példában látott sokszög esetében a határoló oldalak hosszát kellett összeadnunk.

2. példa

Egy téglalap kerülete 42 cm, oldalainak aránya 2 : 5. Mekkorák a téglalap oldalai?

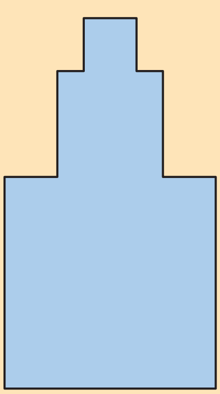
Megoldás

A téglalap félkerülete 42 cm : 2 = 21 cm.
A félkerület a rövidebb és hosszabb oldal összege, ezért a 21-et kell felosztani 2 : 5 arányban.
2 + 5 = 7, tehát a 21-et 7 részre osztjuk, és ebből veszünk 2, illetve 5 részt.
21 : 7 = 3, ezért a rövidebb oldala $3 \cdot 2 = 6$ cm, a hosszabb oldala pedig $3 \cdot 5 = 15$ cm.

3. példa

Az itt látható alakzat 3 egymásra helyezett négyzetből áll.
A kisebb négyzetek megfelelő csúcsa a nagyobb négyzetek oldalának két negyedelőpontjába esik.

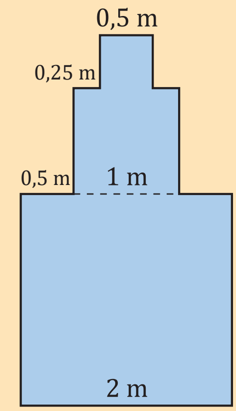
a) Mekkora az alakzat kerülete, ha tudjuk, hogy a legnagyobb négyzet oldala 2 méter?
b) Az alakzatot a lehető legkisebb téglalap alakú papírból vágtuk ki. Mekkora a téglalap kerülete?



Megoldás

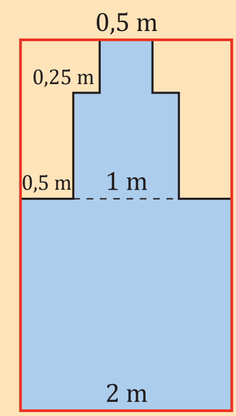
a) Ha a kisebb négyzetek megfelelő csúcsai a nagyobb négyzetek oldalának két negyedelőpontjába esnek, akkor a középső négyzet oldala a nagy négyzet oldalának a fele. Ugyanígy a kis négyzet oldala a középső négyzet oldalhosszának fele.
A négyzetek oldalhosszai: 2 méter, 1 méter és 0,5 méter.
Az alsó és a felső négyzet 3-3 teljes oldala, a középső négyzet 2 teljes oldala tartozik a kerülethez. Odatartoznak még a vízszintes oldalrészek, amelyek 0,5 m és 0,25 m hosszúak.

A sokszög kerülete:
$K = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}25 = 11$ (m).



b) Az alakzatot magában foglaló téglalapok közül az lesz a legkisebb, amelynek rövidebb oldala a nagy négyzet oldalával egyenlő, hosszabb oldala a három négyzet 1-1 oldalhosszának összege.
A téglalap oldalai: 2 méter és 3,5 m.

A kerülete:
$2 \cdot (2 + 3{,}5) = 11$ (m).



PÁROS MUNKA

Vitassátok meg, vajon véletlen volt-e, hogy a 3. példában a legkisebb bennfoglaló téglalap kerülete ugyanakkora, mint az alakzat kerülete!
Hogyan változna a kerület, ha a csúcsok nem a negyedelőpontokba kerülnek?

Feladatok

1. Számítsd ki a négyzet kerületét, ha egyik oldalának hossza

a) 325 mm; *b)* 12,5 cm; *c)* 34 dm; *d)* $\frac{2}{5}$ m!

2. Számítsd ki a téglalap kerületét, ha adott az oldalainak hosszúsága!

a) 3 cm, $\frac{2}{5}$ m; *b)* 9,8 dm, 770 mm; *c)* $\frac{4}{25}$ dm, 3,4 cm; *d)* $\frac{3}{16}$ km, 35,5 m.

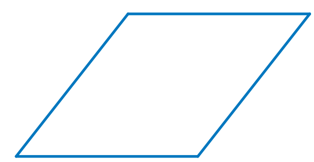
3. Ismerjük egy egyenlő szárú háromszög két oldalának hosszát. Mekkora lehet a kerülete?
a) 8 cm és 6 cm; *b)* 10,2 cm és 6,6 cm; *c)* 13 mm és 6 mm; *d)* 3 dm és 1,5 dm.

4. Egy négyzet alakú telek bekerítéséhez 122 m drótkerítést használtak fel, de kihagyták a 6 m széles kapu helyét. Határozd meg a telek oldalának hosszúságát!

5. Döntsd el, hogy igaz vagy hamis?
a) Egy négyszög kerülete kisebb, mint a leghosszabb oldal hosszának a négyszerese.
b) Van olyan háromszög, amelynek kerülete egy tetszőleges oldalhosszának háromszorosával egyenlő.
c) Ha két háromszög egy-egy oldala egyenlő, akkor a kerületük is egyenlő.

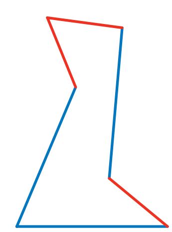
6. Egy szabályos háromszög minden oldalának hosszát megnöveljük 30 cm-rel. Hogyan változik a kerülete?

7. A képen látható négyszög minden oldala egyenlő. Két szemközti oldalának hosszát 0,8 dm-rel, a másik két szemközti oldalának hosszát pedig 140 mm-rel növeljük meg.

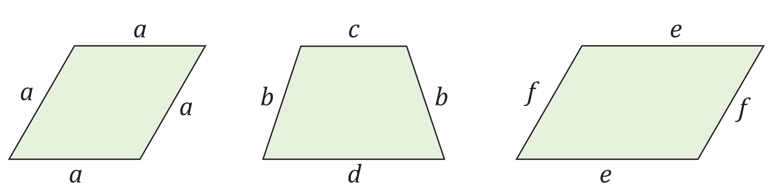


a) Mérd meg az ábrán látható négyszög oldalait, és készíts a megváltozott négyszögről egy arányos rajzot a füzetedben!
b) Hány centiméterrel lesz nagyobb az így kapott négyszög kerülete az eredeti négyszög kerületénél?

8. 93 cm hosszú drótból meghajtogattuk a képen látható hatszöget. A síkidom azonos színnel jelölt oldalainak hosszúsága megegyezik. A piros oldal 13 cm-rel rövidebb, mint a kék. Mekkorák az oldalai?



9. Kiszámítottuk az ábrán látható három négyszög kerületét, majd a végeredményeket összekevertük: 50 cm, 52 cm, 51 cm. Mindegyik négyszögnek minden oldala cm-ben mérve egész szám volt. Mennyi az egyes négyszögek kerülete?



10. Egy szabályos és egy egyenlő szárú háromszög kerületét számítottuk ki. Az egyik 2005 cm, a másik 2004 cm. Mindkét háromszög minden oldala centiméterben mérve egész szám volt. Melyik a szabályos háromszög kerülete?

11. Egy téglalap kerülete 56 dm, oldalainak aránya 3 : 4. Számítsd ki a téglalap területét!

12. *a)* Egy szabályos háromszög kerülete 5,25 mm. Mekkorák az oldalai?
b) Egy négyzet kerülete $\frac{3}{5}$ m. Mekkorák az oldalai?
c) Egy egyenlő szárú háromszög kerülete 16 cm, oldalai centiméterben mérve egész számok. Mekkorák az oldalai?

3. A TERÜLET ÉS A TÉRFOGAT MÉRÉSE

Játék

Alakítsatok 3-4 fős csoportokat! Minden csoport kap egy lapot, amelyre a válaszokat fogja írni.
Tanárotok 10 tárgy képét mutatja egymás után. Becsüljétek meg, hogy a tárgyak mekkora területet foglalnak el a képen! Minden esetben 3 felsorolt lehetőség közül választhattok. A jónak gondolt válasz betűjelét írjátok le a papírra!
Az a csapat nyer, amelyik a legtöbb jó választ adta.

Az előző években tanultunk a terület és a térfogat mértékegységeiről.
Ismételjük át, milyen mértékegységekkel mérhetjük alakzatok területét!

A területmérésnél használt mértékegységek:
négyzetmilliméter, négyzetcentiméter, négyzetdeciméter, négyzetméter, ár, hektár, négyzetkilométer.

$$1\ \mathrm{mm}^2 \xrightarrow{\cdot 100} 1\ \mathrm{cm}^2 \xrightarrow{\cdot 100} 1\ \mathrm{dm}^2 \xrightarrow{\cdot 100} 1\ \mathrm{m}^2 \xrightarrow{\cdot 100} 1\ \mathrm{a} \xrightarrow{\cdot 100} 1\ \mathrm{ha} \xrightarrow{\cdot 100} 1\ \mathrm{km}^2$$

$$1\ \mathrm{mm}^2 < 1\ \mathrm{cm}^2 < 1\ \mathrm{dm}^2 < 1\ \mathrm{m}^2 < 1\ \mathrm{a} < 1\ \mathrm{ha} < 1\ \mathrm{km}^2$$

A testek felszínének megadásakor is a terület mértékegységeit használjuk.

Becsüljétek meg a felsorolt területek nagyságát! Becsléseiteket írjátok a füzetetekbe!

I. Mekkora a területe a matematikakönyvetek fedőlapjának?
II. Mekkora a területe az osztálytermetek padlójának?
III. Mekkora az alapterülete az iskola tornatermének?
IV. Mekkora a területe a kezetek nagyujján lévő körömnek?

Mérjétek meg a szükséges adatokat, és számoljátok ki a területeket!
Hasonlítsátok össze becsléseteket a mérés alapján számolt eredményekkel!

A térfogatmérésnél használt mértékegységek:
köbmilliméter, köbcentiméter, köbdeciméter, köbméter, köbkilométer.

$$1\ \mathrm{mm}^3 < 1\ \mathrm{cm}^3 < 1\ \mathrm{dm}^3 < 1\ \mathrm{m}^3 < 1\ \mathrm{km}^3$$

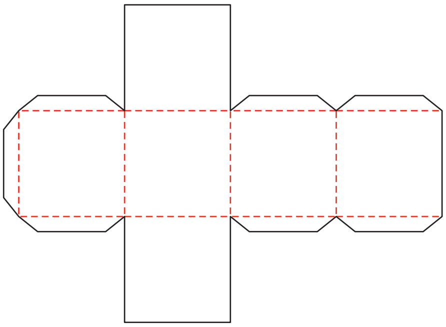
$$1\ \mathrm{mm}^3 \xrightarrow{\cdot 1000} 1\ \mathrm{cm}^3 \xrightarrow{\cdot 1000} 1\ \mathrm{dm}^3 \xrightarrow{\cdot 1000} 1\ \mathrm{m}^3 \xrightarrow{\cdot 1\,000\,000\,000} 1\ \mathrm{km}^3$$

Az űrmérték egysége az **1 liter**.
1 liter = 1 dm³.
Az űrtartalom mérésénél használt mértékegységek:
milliliter, centiliter, deciliter, liter, hektoliter.

$$1\ \mathrm{ml} < 1\ \mathrm{cl} < 1\ \mathrm{dl} < 1\ \mathrm{l} < 1\ \mathrm{hl}$$

$$1\ \mathrm{ml} \xrightarrow{\cdot 10} 1\ \mathrm{cl} \xrightarrow{\cdot 10} 1\ \mathrm{dl} \xrightarrow{\cdot 10} 1\ \mathrm{l} \xrightarrow{\cdot 100} 1\ \mathrm{hl}$$

Csoportmunka



Alakítsatok 4 fős csoportokat! A csoport tagjainak feladata egy kocka vagy téglatest készítése kartonpapírból. A feladathoz szükséges eszközök: kemény papírlap, ceruza, vonalzó, olló, ragasztó.
A csoport egyik tagja 1 cm élű kockát, másik tagja 1 dm élű kockát, harmadik tagja 5 cm élű kockát készítsen, a negyedik pedig olyan téglatestet, amelynek élei 3 cm, 4 cm és 5 cm hosszúak.
A testek tervezéséhez segítségként megadjuk a kocka egyik hálóját.
A testek elkészítése után beszéljétek meg, hány kis kockára lenne szükség a nagyobb testek kitöltéséhez!
Mekkora a térfogata a kis kockának és a nagyobb méretű testeknek?

Páros munka

Keressetek a környezetetekben olyan tárgyakat, amelyeknek
a) a térfogata körülbelül $1\ m^3$, $1\ dm^3$,
b) az űrmértéke körülbelül 1 liter, 1 dl.
Soroljátok fel a füzetetekben, majd beszéljétek meg a felsorolt tárgyak méreteit!

Kutatómunka

Népmesékben, régi történetekben találkozhatsz a meszely, icce, akó szavakkal.
Mit jelentenek ezek a szavak?
Keress hasonló szavakat!
Add meg a ma használatos egységekkel is ezeket!
Nézz utána, hogy mit jelent a négyszögöl, magyar hold és katasztrális hold!

Feladatok

1. A fáknak igen nagy a szén-dioxid-feldolgozó képessége. Egy lombköbméter levélfelület kb. 4500 gramm szennyező anyagot szűr ki a levegőből. Tippeld meg, mennyit szűrhet ki egyetlen gesztenyefalevél? Hasonlítsátok össze a tippjeiteket az osztálytársakkal! Keressetek erről adatokat az interneten!

2. Válogasd szét két halmazba a következő mértékegységeket!
liter hektár négyzetméter deciliter négyzetmilliméter milliliter ár

3. Add meg négyzetmilliméterben!

a) 3 cm^2; *b)* 15 cm^2; *c)* 7 dm^2; *d)* 125 dm^2;
e) 8 m^2; *f)* 29 m^2; *g)* 0,012 m^2; *h)* 1,65 m^2.

4. Add meg négyzetméterben!

a) 5200 dm^2; *b)* 13 400 dm^2; *c)* 120 000 cm^2; *d)* 85 000 cm^2;
e) 0,000 02 km^2; *f)* 29 ár; *g)* 457 ha; *h)* 820 000 000 mm^2.

5. Add meg négyzetdeciméterben!

a) 5000 cm^2; *b)* 660 cm^2; *c)* 87 m^2; *d)* 0,012 m^2;
e) 5 ár; *f)* 0,6 ár; *g)* 11 ha; *h)* 0,005 ha.

6. Rakd területük alapján növekedő sorrendbe a következő újsághirdetésekben szereplő telkeket!

a) Pest megyében Budapesthez közel 2500 nm-es telek elfogadható áron eladó.
b) Miskolctól 20 km-re 1600 négyszögöles építési telek eladó. Érdeklődni a megadott telefonszámon lehet.
c) Debrecenben csöndes, nyugodt környezetben, félhektáros telken lakások eladók.

7. A 3,6 km^2 nagyságú földön elkezdték a szántást. Az első napon 450 000 m^2-t, a második napon 48 hektárt sikerült felszántani.

a) Mennyit kell még szántani a második nap után?
b) Ha hat nap alatt szeretnék befejezni a munkát, akkor a további napokon átlagosan hány hektárral kellene végezni?
c) Hány km^2 lesz a hat napra vonatkoztatott napi átlagos felszántott terület, ha a hat nap alatt elkészülnek a teljes munkával?

8. A fák vizet párologtatnak el, ezzel hűtik környezetüket. Egy lombköbméter levélfelület kb. 47 liter vizet párologtat el kora tavasztól késő őszig (április 1-től szeptember 30-ig). Tippeld meg, mennyi vizet párologtat el egy terebélyes lombú gesztenyefa egy nap alatt! Hasonlítsátok össze a tippjeiteket az osztálytársakkal! Keressetek erről adatokat az interneten!

9. Add meg köbmilliméterben!

a) 3 cm^3; *b)* 7 cm^3; *c)* 2 dm^3; *d)* 5 dm^3;
e) 2 liter; *f)* 0,3 liter; *g)* 1,4 dl; *h)* 150 ml.

10. Add meg deciliterben!

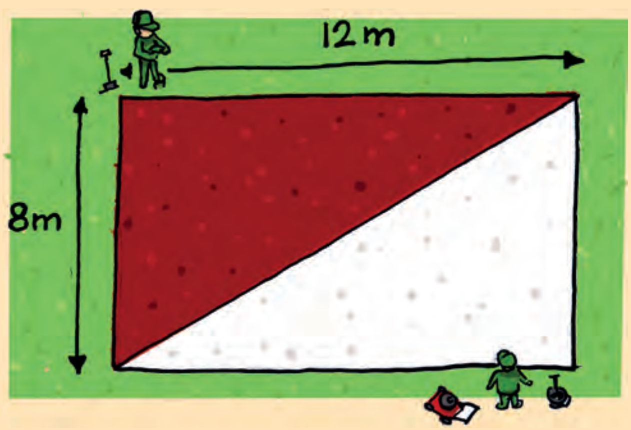
a) 4 dm^3; *b)* 12 dm^3; *c)* 1,5 m^3; *d)* 0,1 m^3;
e) 72 liter; *f)* 0,6 liter; *g)* 480 hl; *h)* 0,4 hl.

11. Három üvegben összesen 28 dl szörp volt, de az elsőből már elfogyott 0,2 liter bodza-, a másodikból 30 cl eper-, a harmadikból 200 ml málnaszörp. Így most mindegyik üvegben ugyanannyi maradt. Mennyi szörpöt tartalmaztak eredetileg az üvegek?

A téglalap és a négyzet területét már meg tudjuk határozni. A területet t-vel vagy T-vel szoktuk jelölni.
A **téglalap terület**ét megkapjuk, ha két szomszédos oldalának hosszát összeszorozzuk.
A terület kiszámításánál figyelni kell arra, hogy az oldalak hossza azonos mértékegységű legyen.
A négyzet olyan téglalap, amelynek minden oldala egyenlő, ezért a **négyzet terület**ét megkapjuk, ha az oldalának hosszát önmagával megszorozzuk.

1. példa

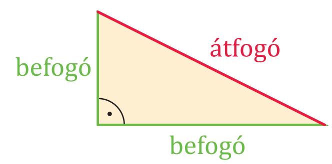
A kertészek szeretnek különböző színű virágokból geometriai mintákat kialakítani. Egy tér közepén a 8 méter széles és 12 méter hosszú, téglalap alakú virágágyást az átló mentén kettéosztották. A téglalap egyik felébe piros, a másik felébe fehér virágokat ültettek. Mekkorák ezek a részek külön-külön?



Megoldás

A virágágyás területe: $t = 8 \cdot 12 = 96$ (m^2).
Az átló két egybevágó derékszögű háromszögre vágja a téglalapot, ezért mindkét rész a téglalap területének felével egyenlő, azaz 48 m^2.

A téglalap két szomszédos oldala a derékszögű háromszögnek is oldala. Ezek a derékszögű háromszög **befogói.** A téglalap átlója is oldala a derékszögű háromszögnek. Ez a derékszögű háromszög **átfogó**ja.

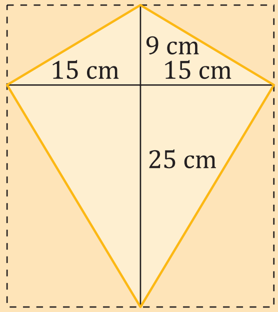


A példában láttuk, hogy a **derékszögű háromszög területét a két befogó szorzatának fele adja.**

2. példa

A 6. osztályos lányok diáknapra színes kartonlapból papírsárkányt készítettek az ábrán látható méretekkel.

a) Mekkora a területe annak a téglalapnak, amelyből az ábrán látható módon a papírsárkány kivágható?
b) Mekkora területű a papírsárkány?



Megoldás

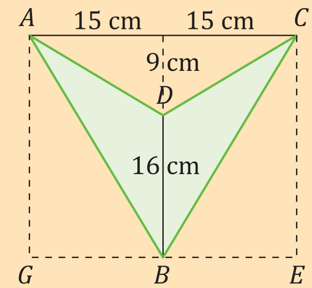
a) Az adatok alapján a téglalap alakú papírlap két oldalának hossza 30 cm és 34 cm. Ennek a téglalapnak a területe $30 \cdot 34 = 1020$ (cm^2).
b) A nagy téglalapot négy kis téglalapra osztottuk. Egy-egy kis téglalap területét a négyszög egy-egy oldala felezi, ahogy ezt az előző példában láttuk. Ezért a négyszög területe a téglalap területének felével egyenlő, azaz $t = 510$ cm^2.

3. példa

A 6. a osztályos fiúk a lányok ötletét az ábra szerint módosították.
Mekkora a fiúk által készített papírsárkány területe?

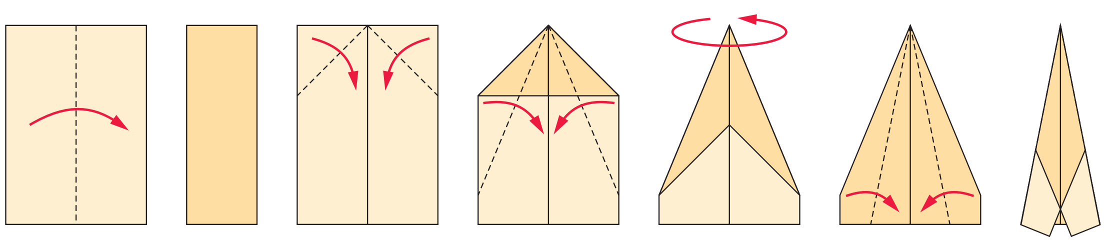
Megoldás

Az *ABCD* négyszöget foglaljuk be az ábrán látható *AGEC* téglalapba!
A téglalap területe: $30 \cdot (16 + 9) = 750\ \text{cm}^2$.
Az *ABC* háromszög területe a téglalap területének fele: $375\ \text{cm}^2$.
Az *ABCD* négyszög területe ennél az *ADC* háromszög területével kisebb.
Az *ADC* háromszög két derékszögű háromszögből áll, ezért a területük összegét meg tudjuk határozni: $135\ \text{cm}^2$.
Vagyis a keresett terület: $t = 375 - 135 = 240\ (\text{cm}^2)$.
Ha a két átló hosszának szorzatát elfelezzük, akkor is ezt kaptuk volna.

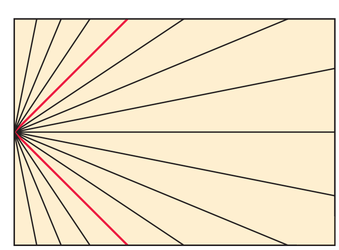


CSOPORTMUNKA

Egy 21 cm-szer 29,7 cm-es A4-es lapból hajtogassatok repülőt! A mellékelt ábrák segítenek.



Kipróbálás után nyissátok szét a lapot! A hajtásvonalak adnak egy mintát.
Beszéljétek meg!



– Mekkora szöget zár be egymással két szomszédos hajtásvonal?
– Vannak-e olyan hajtásvonalak, amelyek merőlegesek egymásra?
– Két hajtásvonalat pirossal berajzoltunk. Ezek két háromszögre és egy ötszögre osztják a téglalapot. Mekkora területűek ezek a sokszögek?



Feladatok

1. Számítsd ki a téglalap területét, ha oldalainak hossza:
a) 34 cm és 45 cm; *b)* 28 cm és 90 cm;
c) 2 dm és 18 cm; *d)* 0,3 m és 74 cm!

2. Mekkora a négyzet területe, ha
a) $k = 164$ cm; *b)* $k = 640$ m;
c) $k = 16$ km; *d)* $k = 256$ mm?

3. Számítsd ki a derékszögű háromszög területét, ha két befogójának hossza
a) 16,4 cm és 8,6 cm; *b)* 135 m és 42 m;
c) 16 mm és 3,2 cm; *d)* 25 dm és 12,5 m!

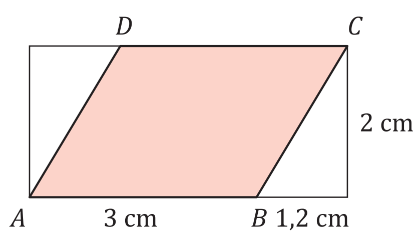
4. Párosítsd a mérőszámokat a mértékegységekkel úgy, hogy három egyenlő mennyiséget kapj!

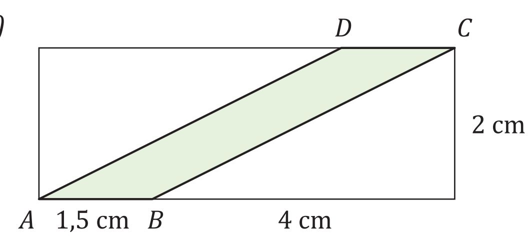
60 0,6 6000 cm^2 dm^2 m^2

5. Egy írólap mérete: 14,6 cm és 21 cm. Vágd ketté az egyik átlója mentén! Mekkora területű darabokat kaptál?

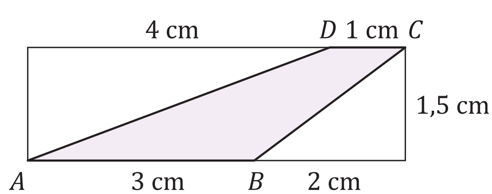
6. Egy téglalap oldalainak hossza 5 cm és 12 cm. Vágd szét az egyik 13 cm hosszú átlója mentén! Az így kapott két derékszögű háromszöget illeszd össze az egyenlő hosszú oldalaik mentén! Hány különböző sokszöget kaptál? Határozd meg a sokszögek oldalainak hosszát!

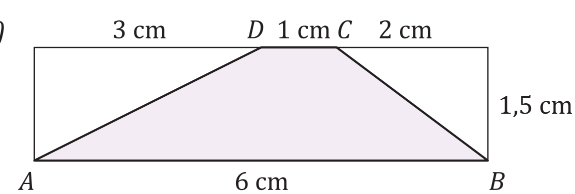
7. Határozd meg az ábrán látható színes négyszögek területét!

a)


b)


8. Határozd meg az ábrán látható színes négyszögek területét!

a)


b)


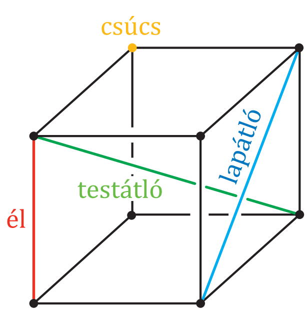
9. Ábrázold a következő pontokat koordináta-rendszerben: $A(-2; 2)$, $B(1; -1)$, $C(7; 2)$, $D(4; 5)$, $E(1; 5)$, $F(-2; 5)$! Legyen a koordináta-rendszer egysége 1 cm!
Mekkora a területe az AEF, $ABCE$ és $ACDE$ sokszögeknek?

5. ALAKZATOK A TÉRBEN

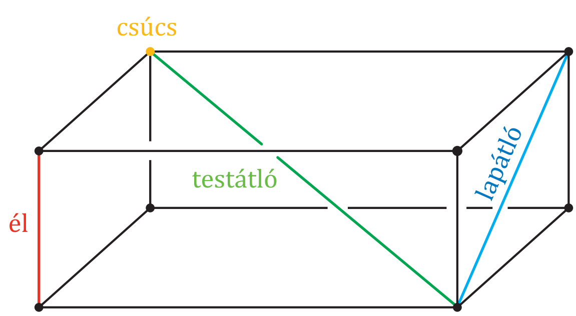
A pontok, egyenesek, síkok összefoglaló neve: térelemek. A térelemek segítségével **test**eket hozhatunk létre.

Vannak olyan testek, amelyeket csak sokszöglapok határolnak.

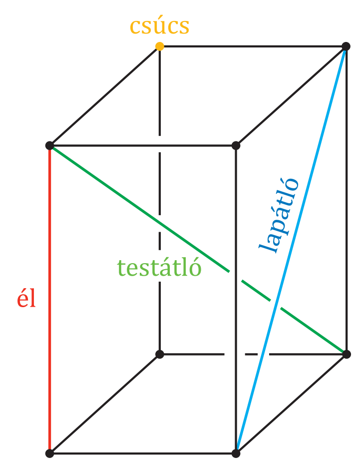
A sokszöglapokkal határolt testekben **él**nek nevezzük a síklapok metszésvonalát, **csúcs**nak az élek metszéspontját. Két nem szomszédos csúcs összekötésével **átló**t kapunk. A **lapátló** egy oldallapra illeszkedik. A nem oldallapra illeszkedő átlókat **testátló**nak nevezzük.



kocka



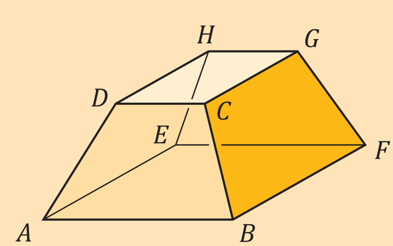
téglatest



négyzetes oszlop

1. példa

Soroljuk fel az ábrán látható test lapjait, éleit, lapátlóit, testátlóit!



Megoldás

Lapok: *ABCD, EFGH, ABFE, BCGF, CDHG, DAEH*.

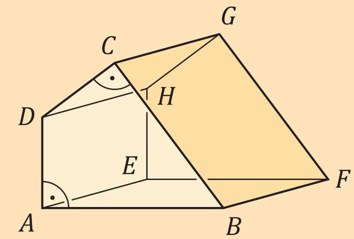
Élek: *AB, BC, CD, DA, AE, BF, CG, DH, EF, FG, GH, HE*.

Lapátlók: *AC, BD, AF, BE, BG, CF, CH, DG, DE, AH, EG, FH*.

Testátlók: *AG, BH, CE, DF*.

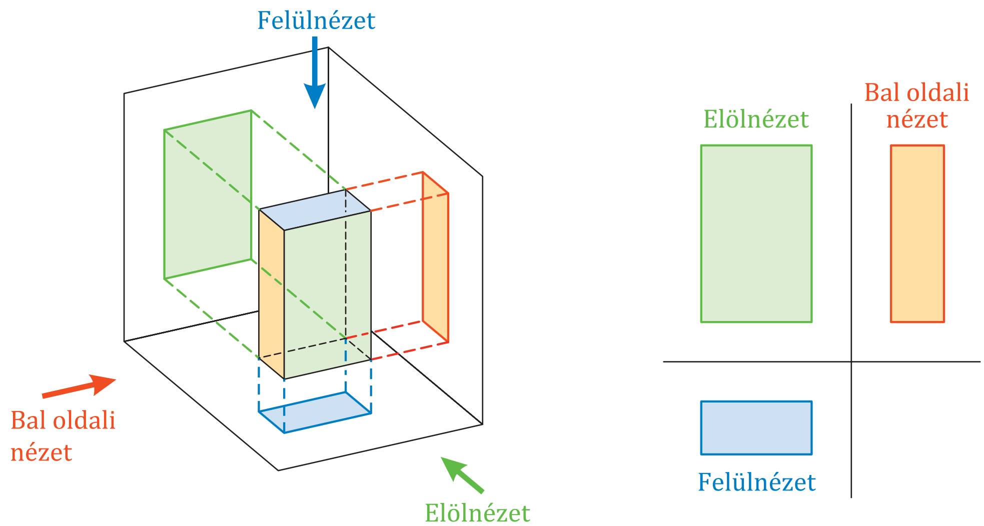
2. példa

Az ábrán látható test élei között keressünk merőlegesen metszőket, párhuzamosakat, kitérőket!



Megoldás

Merőlegesen metszők például: $AB \perp AD$, $CB \perp CD$, …
Párhuzamosak például: $AB \parallel EF$, $AE \parallel BF$, $CD \parallel GH$, …
Kitérők például: AB és HG, BF és DC, AD és EF, …



Egy téglatestet helyeztünk el az ábrán látható módon egy dobozból kivágott sarokrészben. Elölről, felülről és balról megvilágítottuk. A doboz belső felületén a téglatest vetületi képét kaptuk.

Az ábrán látható tárgy **elölnézeti képét** megkapjuk, ha elölről világítjuk meg.
A **felülnézeti képet** úgy kapjuk meg, ha felülről nézünk a tárgyra.
A **bal oldali nézetet** megkapjuk, ha a tárggyal szemben állva a bal kezünk felől lévő irányból nézzük a tárgyat.

Mivel egy testhez képest többféle módon helyezkedhetünk el, ezért a nézetek eldöntéséhez gyakran nyíl jelöli azt, hogy honnan nézzük a testet.

3. példa

Rajzoljuk le vázlatosan a képen látható asztalt felülnézetben, oldalnézetben és elölnézetben!

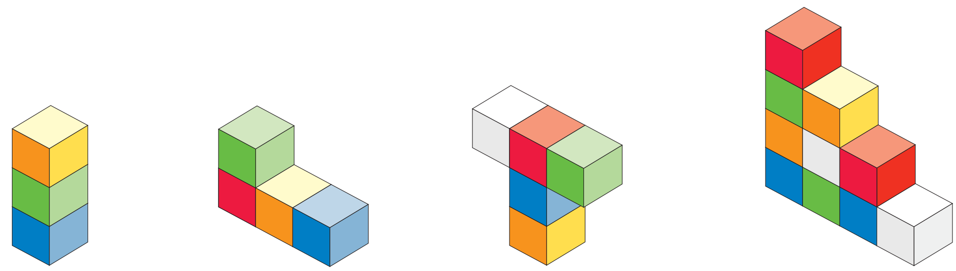
Megoldás

Ebben a példában a két oldalnézet megegyezik.

5. ALAKZATOK A TÉRBEN

Építsünk kis kockákból!

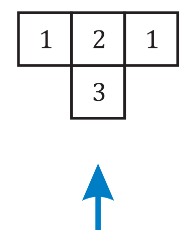
A feladatokhoz szükségetek lesz sok egységkockára.
Ezek lehetnek egyforma dobókockák vagy színesrúd-készlet kis kockái. Szükség szerint helyettesítheted a kisebb kockákat egy más színű, nagyobb rúddal.
A) Építsd meg az alábbi testeket! Számold meg, hány éle, csúcsa, lapja van!



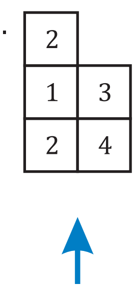
B) Építsd meg kis kockákból azokat az alakzatokat, amelyek alaprajza az ábrákon látható! A számok azt mutatják, hogy az adott helyen hány kis kockát kell egymásra tenni.

C) Rajzold le az építményeket a nyíl irányából nézve!

1.

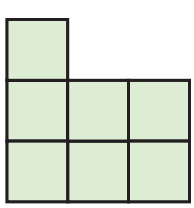


2.

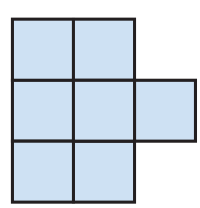


Páros munka

A) Építsetek olyan testet, amelyet
ha elölről nézünk, ezt látjuk,



ha felülről nézünk, ezt látjuk!



B) Építsétek meg a lehető legkevesebb egységkocka felhasználásával!
C) Legfeljebb hány kockára van szükség a test megépítéséhez?
D) A páros mindkét tagja építsen egy térbeli alakzatot egységkockákból! Rajzoljátok le a látványt felülről, elölről és bal oldalról! Cseréljetek helyet a párotokkal, és rajzoljátok le a társatok által készített alakzat felül-, elöl- és bal oldali nézetét! Hasonlítsátok össze a rajzaitokat!

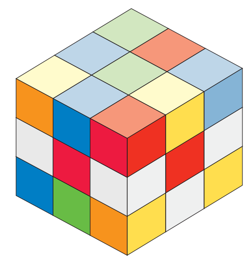
Kutatómunka

Törd a fejed: legkevesebb hány lap határolhat egy testet?

Feladatok

1. Hány különböző alakzatot tudsz építeni 4 db egybevágó mágneses kis kockából, ha csak teljes lapjukkal tapadnak egymáshoz? Két test akkor különböző, ha elforgatással nem vihetők egymásba.

2. Építettünk 27 mágneses kis kockából egy nagy kockát.

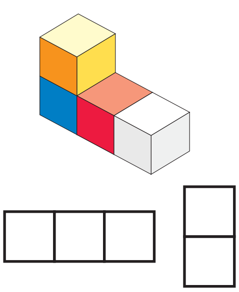


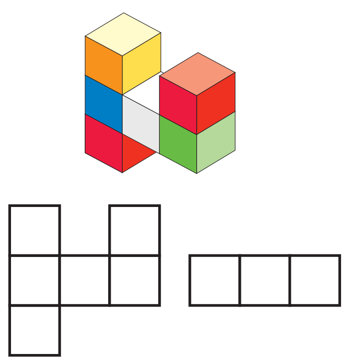
a) Legfeljebb hány kis kockát tudsz belőle elvenni úgy, hogy ebből a nézetből továbbra is 3 × 3 × 3-asnak látszódjon?

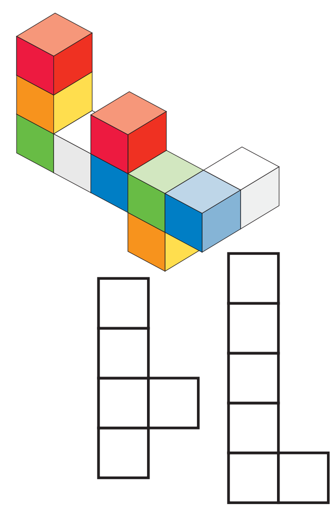
b) Ha a nagy kocka 4 × 4 × 4-es, akkor hány kis kockát vehetünk el a fentihez hasonló módon?

c) Lehet-e építeni az *a)* és a *b)* esetben az elvett kis kockákból egy újabb méretű kockát? Ha igen, mekkorák lesznek az élei?

3. Megrajzoltunk kettőt az alábbi építmények három különböző nézetéből. Találd ki, hogy melyik hiányzik, és rajzold meg a füzetedben!

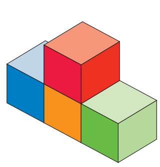




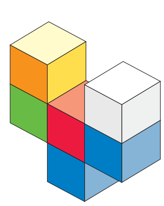


4. Rajzold meg a füzetedben az alábbi építmények három különböző nézetét!

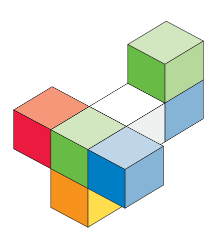
a)



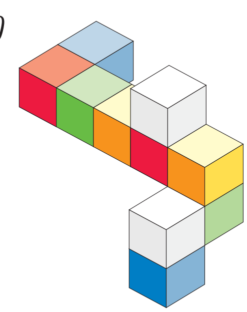
b)



c)



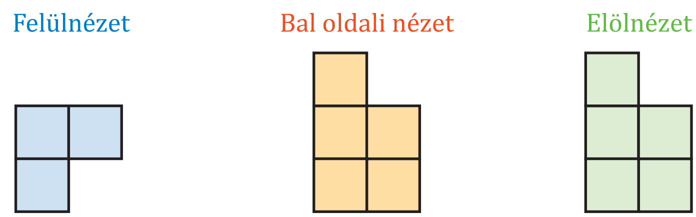
d)



5. Mágneses kis kockákból építettünk egy testet, melynek lerajzoltuk az alaprajzát. Milyen lehet ennek a testnek az elölnézete és a bal oldali nézete? Keresd meg az összes megoldást!

	2
1	2

6. Építsd meg azt a testet, amelynek három nézetét megadtuk!



7. Egymás tetejére raktunk és lapjaival összeragasztottunk 5 darab szabályos dobókockát. Mennyi lehet legalább és mennyi legfeljebb a lapjain látható pöttyök összege?

8. A kocka egy lapját beszíneztük zöldre.
a) Hány olyan éle van, amelyiknek nincs zöld pontja?
b) Képzeljük el, hogy a kocka bármely két csúcsára egyenest illesztünk! Hány olyan egyenes lesz ezek között, amelyiknek nincs zöld pontja?

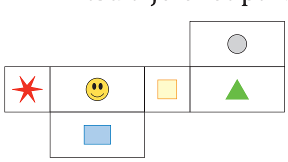
9. Rajzolj a füzetedbe egy kockát, és színezd ki egy élét és egy testátlóját úgy, hogy
a) metszők; *b)* kitérők legyenek!

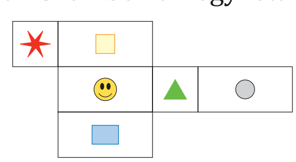
10. Válaszolj az alábbi kérdésekre! Válaszodat ábrával indokold!
a) Milyen helyzetű lehet a téglatest két lapátlója?
b) Lehet-e egy kocka éle és egy testátlója párhuzamos?
c) Lehet-e egy téglatestben egy lapátló párhuzamos egy testátlóval?

11. Mérd meg, hogy egy téglatest alakú doboz egyik csúcsa milyen messze van a többi csúcstól! Hány különböző hosszúságot fogsz kapni? Mindegyiket sikerült megmérned?

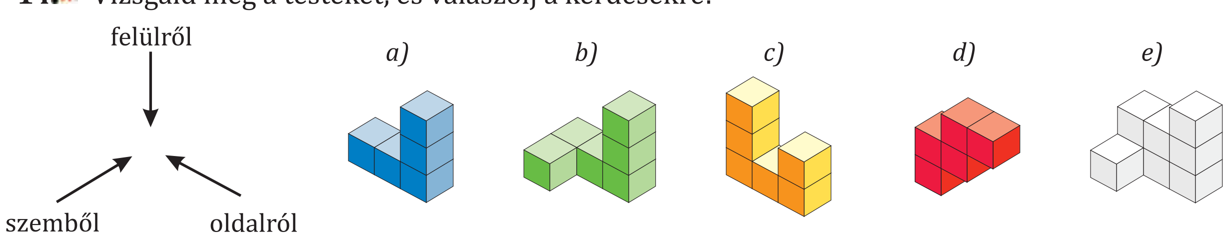
12. Egy téglatest alakú doboz három különböző élének hossza: 6 cm, 2 cm és 3 cm. Milyen messze van a doboz egy kiválasztott csúcsa azoktól az oldallapoktól, amelyekre nem illeszkedik ez a csúcs?

13. Állítsd a jeleket párba aszerint, mi mivel van szemben a négyzetalapú hasáb testhálóján!

a)


b)


14. Vizsgáld meg a testeket, és válaszolj a kérdésekre!

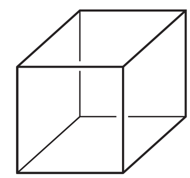


a) Mely testek felülnézetével egyezik meg a *c)* ábra felülnézete?
b) Mely testek oldalnézete egyezik meg a *d)* ábra oldalnézetével?
c) Igaz-e, hogy az *a)* és *b)* ábra szemből nézete megegyezik?
d) Helyezz át az *e)* testben egy kis kockát úgy, hogy az oldalnézete megegyezzen a *d)* oldalnézetével! Hány helyre rakhatod az elvett kiskockát?

A téglatest és a kocka felszínét meg tudjuk határozni, csak az élek hosszát kell ismernünk hozzá. A téglatestet hat téglalap határolja, amelyekből két-két szemközti egybevágó.

Ha a téglatest lapjainak területét összeadjuk, akkor a téglatest felszínét kapjuk. A felszín jele: A.

Mivel a téglatest szemközti lapjai egybevágók, ezért először kiszámoljuk az egy közös csúccsal rendelkező téglalapok területét. A három téglalap területét összeadjuk, majd ezt az összeget megszorozzuk 2-vel, így kapjuk a téglatest felszínét.

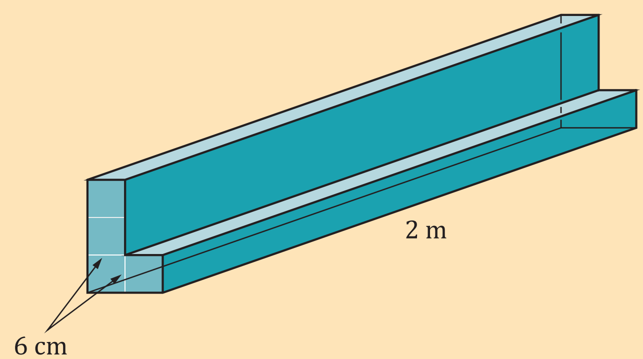


A kockát 6 db egybevágó négyzetlap határolja, ezért a felszíne egy négyzet területének hatszorosa.

A sokszögekkel határolt testek felszínét akkor tudjuk meghatározni, ha a határoló sokszögek területét ki tudjuk számítani.

1. példa

Mekkora az ábrán látható oszlop felszíne?



Megoldás

Az oszlop első és hátsó lapja egy-egy egybevágó hatszög. Az ábrán látható módon ezt a hatszöget egy téglalapra és egy négyzetre tudjuk darabolni. A megadott adatok alapján egy ilyen sokszög területe:

$T = 6 \cdot 18 + 6 \cdot 6 = 108 + 36 = 144\ (\text{cm}^2)$.

Az oszlopot még hat téglalap határolja. Ezek mindegyikének egyik oldala 2 m, azaz 200 cm. A másik oldaluk pedig 18 cm, 6 cm, 12 cm, 6 cm, 6 cm és 12 cm hosszúságú. Látjuk, hogy háromféle téglalap határolja.

Ezek területe:

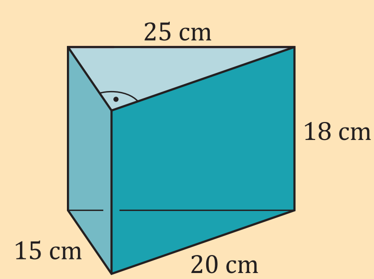
$T_1 = 18 \cdot 200 = 3600\ (\text{cm}^2)$, $T_2 = 12 \cdot 200 = 2400\ (\text{cm}^2)$, $T_3 = 6 \cdot 200 = 1200\ (\text{cm}^2)$.

Az oszlop felszíne:

$A = 2 \cdot 144 + 3600 + 2 \cdot 2400 + 3 \cdot 1200 = 288 + 3600 + 4800 + 3600 = 12\,288\ (\text{cm}^2)$.

2. példa

Egy ajándéknak dobozt készítünk. A dobozt két egybevágó derékszögű háromszög és három téglalap határolja. Készítsük el a doboz hálózatát! Ami a valóságban 1 cm, az a rajzunkon 1 mm legyen! Mekkora lesz a doboz felszíne?



Megoldás

A doboz hálózatát az ábra mutatja.

A háromszög területe: $T = \dfrac{15 \cdot 20}{2} = 150\ (\text{cm}^2)$.

A téglalapok területe:

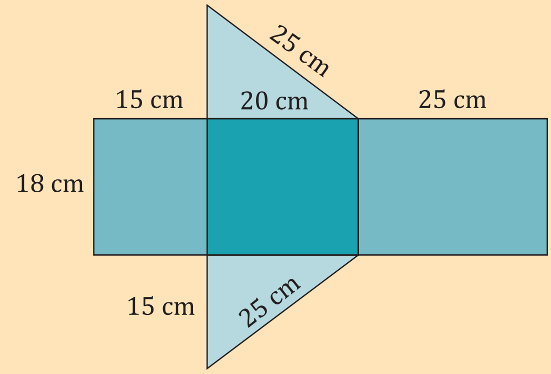
$T_1 = 15 \cdot 18 = 270\ (\text{cm}^2)$,

$T_2 = 20 \cdot 18 = 360\ (\text{cm}^2)$,

$T_3 = 25 \cdot 18 = 450\ (\text{cm}^2)$.

A doboz felszíne:

$A = 2 \cdot 150 + 270 + 360 + 450 = 1380\ (\text{cm}^2)$.



Feladatok

1. Számítsd ki a téglatest felszínét, ha adott az élek hosszúsága!

a) 48 cm, 25 cm, 16 cm; *b)* 4,8 dm, 2 dm, 3,4 dm;
c) 3 m, 22 dm, 105 cm; *d)* 2 dm, 220 cm, 44 100 mm.

2. Számítsd ki a téglatest hiányzó élének hosszát, ha adott a másik két élének hosszúsága és a felszíne!

a) 8 cm, 12 cm és $A = 392\ \text{cm}^2$; *b)* 6 cm, 1,7 dm és $A = 34\,200\ \text{mm}^2$.

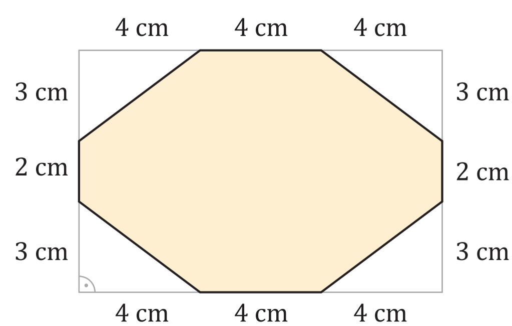
3. Számítsd ki a kocka felszínét, ha az éleinek hossza

a) 9 mm; *b)* 52,8 cm; *c)* 3 dm 5 cm 4 mm; *d)* 1 m 37 mm!

4. Számítsd ki a kocka élének hosszát, ha adott a felszíne!

a) $6\ \text{m}^2$; *b)* $54\ \text{dm}^2$; *c)* $2\ \text{m}^2\ 94\ \text{dm}^2$; *d)* $0{,}04\ \text{dm}^2\ 86\ \text{mm}^2$.

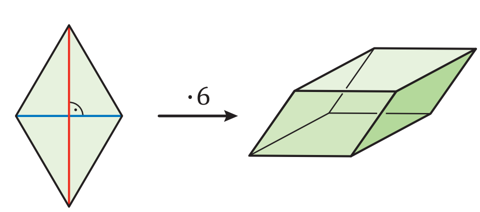
5. Egy műanyag doboz alja és teteje egybevágó nyolcszög, amelynek adatait a vázlatrajz mutatja. Mekkora a doboz felszíne, ha a magassága 12 cm?



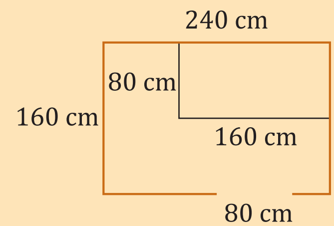
6. Kockát építünk 27 egybevágó, 2 cm élű kis kockából. Hogyan változhat az építmény felszíne, ha egy kis kockát elveszünk

a) a sarkáról;
b) az egyik él közepéről;
c) az egyik lap közepéről?

7. Kivágtunk kartonlapból hat egybevágó négyszöget, és megépítettünk belőlük egy díszdobozt. A négyszög átlói felezik egymást, hosszuk 7 cm és 10 cm. Számítsd ki a doboz felszínét!



1. példa

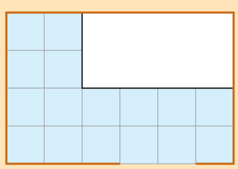


Felújítjuk a fürdőszobát. Az alapja egy 160 cm-szer 240 cm-es téglalap, a magassága 260 cm.
Az ajtaja 2,1 méter magas és 80 cm széles. Az egyik sarokban lesz a 160 cm-szer 80 cm-es kád, ennek magassága 60 cm. A fürdő padlóját 40 cm × 40 cm-es négyzet alakú járólapokból szeretnénk kirakni. Az ajtó tetejéig minden függőleges felületet (így a kád oldallapjait is) 20 cm-szer 30 cm-es téglalap alakú csempékkel fogunk burkolni. A csempék rövidebb oldala lesz vízszintes. A többi rész fehérre lesz festve.

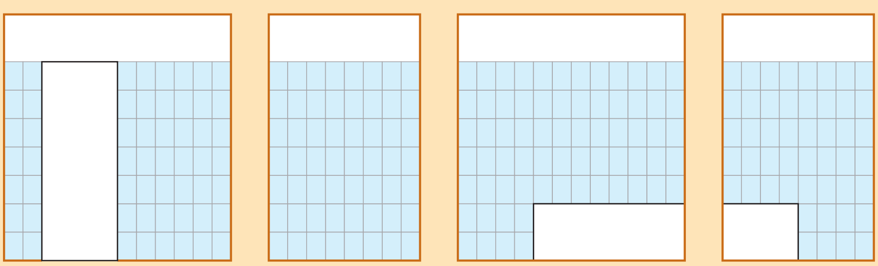
a) Tervezzük meg a négy fal és az alap látványát a burkolólapokkal!
b) Mekkora területű részt kell a járólapokkal befedni? Hány darab járólapra lesz szükség?
c) Mekkora felületet kell csempézni? Hány darab csempe takarja ezt a felületet?
d) Mekkora részt kell fehérre festeni?

Megoldás

a) A fürdőszoba alapja:



A fürdőszoba oldalfalai:



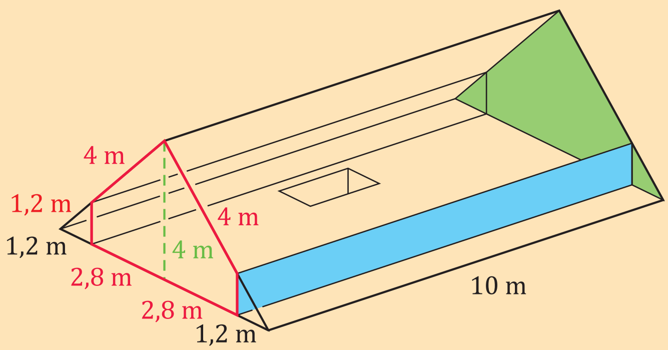
b) A burkolandó részre 16 darab járólapot lehet lerakni.
Egy járólap területe: $40 \cdot 40 = 1600$ (cm^2).
Az összterület: $16 \cdot 1600 = 25\,600$ (cm^2).
Vagyis 2,56 m^2-t kell járólapokkal lefedni.

c) Amennyit a kád takar a falakból, pontosan annyit a kád oldalán is burkolni kell. Csak az ajtó nyílását kell kihagynunk a számolás során.
A burkolandó felület:
$T = 210 \cdot 160 + 210 \cdot 240 + 210 \cdot 160 + 210 \cdot (240 - 80) =$
$= 210 \cdot (160 + 240 + 160 + 160) = 210 \cdot 720 = 151\,200$ (cm^2).
Egy csempe területe: $20 \cdot 30 = 600$ (cm^2).
Mivel $151\,200 : 600 = 252$, ezért 252 darab csempe kell a burkoláshoz.
A rajzaink azt mutatják, hogy ezeket vágás nélkül fel lehet ragasztani a falra. (A valóságban persze lehetnek kisebb eltérések, így általában szükséges a csempék igazítása az illesztéseknél.)

d) A plafont és a csempék fölötti 50 centiméteres részt kell fehérre festeni. Ennek a résznek a területe:
$160 \cdot 240 + 2 \cdot (160 \cdot 50 + 240 \cdot 50) = 38\,400 + 2 \cdot (8000 + 12\,000) = 78\,400$ (cm^2),
ami közel 8 m^2.

2. példa

Egy 8 méter széles és 10 méter hosszú ház padlásterét szeretnénk beépíteni. A padlástér két egyforma, függőleges oldalfala egy-egy egyenlő szárú derékszögű háromszög (az ábrán az egyiket zöldre színeztük). Beépítéskor hosszában mindkét oldalon készült egy-egy 1,2 méter magas fal (ebből az egyiket kékre színeztük az ábrán).



a) Mekkora területet kell padlószőnyeggel fedni, ha a feljáró egy 1,2 méterszer 1,8 méteres téglalap alakú rész?

b) Minden falat festeni szeretnénk. Mekkora felületre kell festéket vásárolnunk, ha a ferde felületeken hat darab 2 m^2-es tetőtéri ablak található?

Megoldás

a) A 10 m hosszú szoba szélessége az ábra alapján 5,6 m. Ezt felhasználva a területe:
$T_1 = 10 \cdot 5{,}6 = 56$ (m^2).

A feljáró területe:
$T_2 = 1{,}2 \cdot 1{,}8 = 2{,}16$ (m^2).

A kettő különbsége adja a felhasznált padlószőnyeg területét:
$T = T_1 - T_2 = 56 - 2{,}16 = 53{,}84$ (m^2).

b) Hat felületet kell lefesteni, de csak háromféle síkidommal kell számolnunk, mert mindegyikből 2-2 van. A számoláshoz szükséges adatokat az ábráról tudjuk leolvasni.
A függőleges téglalap területe:
$T_1 = 10 \cdot 1{,}2 = 12$ (m^2).

A ferde téglalap területe:
$T_2 = 10 \cdot 4 = 40$ (m^2).

Az ötszög a függőleges tengelyre szimmetrikus. Az egyik felét úgy kapjuk, hogy egy 4 m befogójú derékszögű háromszögből elhagyunk egy 1,2 m befogójú derékszögű háromszöget. Ezt felhasználva az ötszög területe: $T_3 = 2 \cdot \left(\frac{4 \cdot 4}{2} - \frac{1{,}2 \cdot 1{,}2}{2}\right) = 2 \cdot (8 - 0{,}72) = 14{,}56$ (m^2).

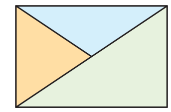
A teljes felület: $2 \cdot (12 + 40 + 14{,}56) = 133{,}12$ (m^2).

A hat ablak területe: $6 \cdot 2 = 12$ (m^2).

A festendő felület: $A = 133{,}12 - 12 = 121{,}12$ (m^2).

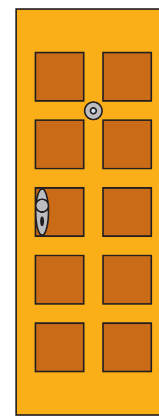
Feladatok

1. A 20 cm-szer 30 cm-es csempe három színnel színezett az ábrán látható módon.



a) Az 1,6 méterszer 2,1 méteres felületet hány darab ilyen csempével lehetne burkolni?
b) Megoldható-e vágás nélkül a burkolás?
c) Hány m^2-esek lesznek az egyes színek által fedett részek?

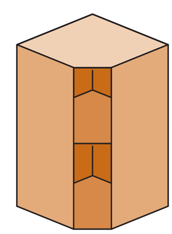
2. A 80 cm széles és 210 cm magas ajtót 10 darab egybevágó, 25 cm oldalú négyzet díszíti. Az ajtó így vízszintesen és függőlegesen is szimmetrikus.



a) Milyen széles sávok vannak a négyzetek között és az ajtó jobb és bal szélén, ha azok mindenütt egyenlők szélesek?
b) Mekkora a sáv a két alsó négyzet alatt és a két felső négyzet felett, ha ezek egymással egyenlő szélesek?

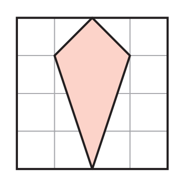
3. Egy terem oldalfalait halványsárgára, a tetejét fehérre szeretnék festeni. A terem 2,5 méter magas, a szélessége 6 méter, a hosszúsága 12 méter. A négy ablak és az ajtó felülete 18 m^2. Egy festékesdoboz 16 m^2-re elegendő festéket tartalmaz. Az új színt két rétegben kell felvinni a felületre, mert úgy lesz szép. Hány doboz festéket kell vásárolni?

4. Egy polcrendszer sarokelemét látod az ábrán. Mekkora a felső ötszöglap területe, ha a hozzákapcsolódó szekrények szélessége 60 cm, a hátsó élek pedig 80 cm hosszúak?

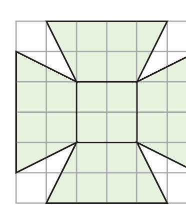


5. A 20 cm oldalú, négyzet alakú, sötétbarna csempéken tíz darab világosbarna, egyenként 5 cm^2-es kör alakú díszítés látható. Mekkora a csempén a sötétbarna felület?

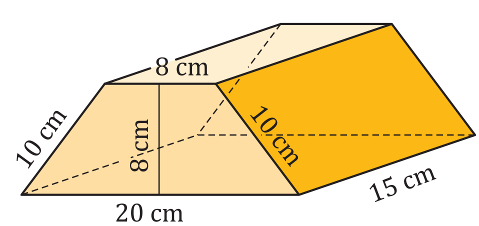
6. A 16 dm^2-es járólapokra az ábrán látható mintát tervezték. Egy 3,2 méter széles és 4 méter hosszú szobát ezzel burkolva hány m^2 lesz a sötétebb árnyalatú rész területe?



7. A 12 cm oldalú négyzetlap sarkaiból egyforma négyszögeket vágunk ki, majd összehajtva egy felül nyitott dobozt állítunk össze belőle. A doboz alja 4 cm oldalú négyzet, a kivágott négyszögek rövid oldala 2 cm hosszúságú. Mekkora a doboz felszíne?



8. Egy doboz vázlatrajzát mutatja az ábra.
a) Készítsd el a doboz hálózatát!
b) Mekkora a test felszíne?
c) Mekkora lesz a doboz felszíne, ha a vázlatrajzon megadott minden értéket kétszeresére növelünk?



8. TESTEK TÉRFOGATA

Az élek ismeretében a téglatest és a kocka térfogatát már meg tudjuk határozni.

Ha a téglatest egy csúcsából kiinduló három élének hosszát összeszorozzuk, akkor a téglatest térfogatát kapjuk.

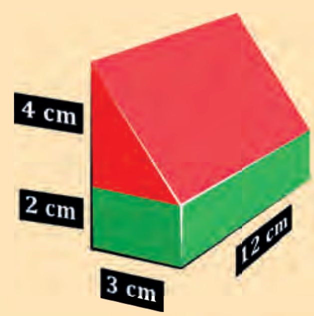
A térfogat kiszámításánál figyelni kell arra, hogy az élek hossza azonos mértékegységű legyen.

A fenti térfogatszámítási módszert akkor is használhatjuk, ha kocka térfogatát kell meghatároznunk, mert a kocka olyan téglatest, aminek minden éle egyenlő hosszú.

A következő példákban olyan testek térfogatát számoljuk, amelyekhez ügyesen felhasználható a kocka és a téglatest térfogatának ismerete.

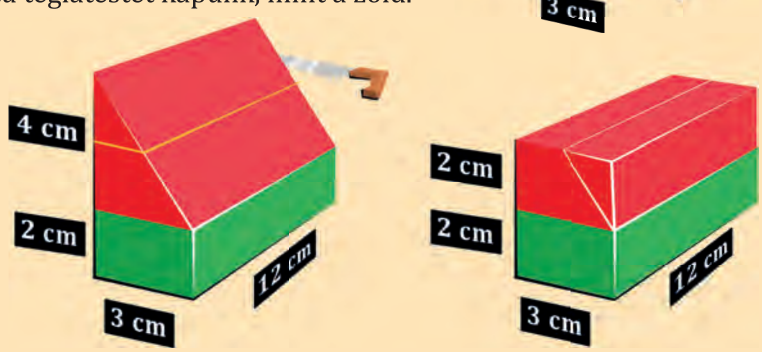
1. példa

Egy építőjáték két elemét egymásra raktuk az ábrán látható módon. Melyik elemnek nagyobb a térfogata?



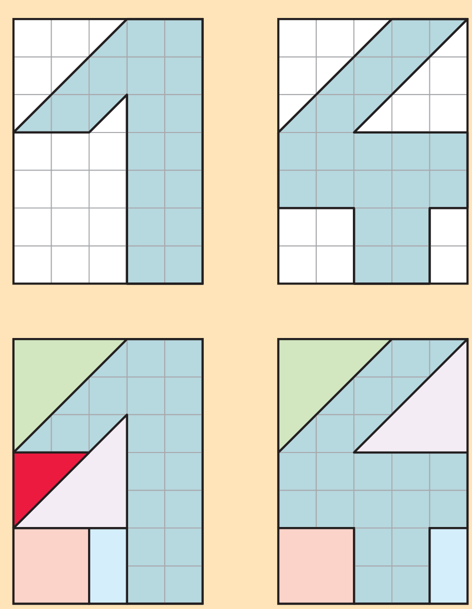
Megoldás

A piros elemet gondolatban a bejelölt vonal mentén kettévágjuk. A felső részt áthelyezve egy ugyanolyan méretű téglatestet kapunk, mint a zöld. Vagyis a két elem azonos térfogatú.



2. példa

Alsó tagozatos gyerekeknek szemléltetőeszközként számjegyeket gyártanak 6 mm vastag falapokból. A mellékelt ábrán az 1 és a 4 tervezetét láthatod. Mindkettőt 5 cm-szer 7 cm-es lapokból fűrészelik ki. Melyik számjegynél több a hulladék, és mennyivel?



Megoldás

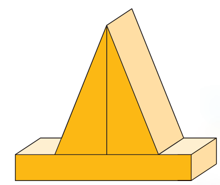
Hasonlítsuk össze a hulladékot átdarabolással! Az azonos nagyságú részeket azonos színnel jelöljük.
Az 1-es számjegy mellett pirossal jelzett résznek nincs azonos színű megfelelője a 4-es számjegynél. Vagyis itt több a hulladék.

A piros síkidom egy egyenlő szárú derékszögű háromszög, a befogója 2 cm hosszúságú. A falap mindenütt 6 mm, azaz 0,6 cm vastagságú. Ezt a testet úgy képzelhetjük el, mint egy félbevágott téglatestet. Ezért a térfogata:

$V = \dfrac{2 \cdot 2 \cdot 0{,}6}{2} = 1{,}2\ (\mathrm{cm}^3)$.

Vagyis az 1-es számjegynél 1,2 cm^3-rel több a hulladék.

PÁROS MUNKA



Az építőkocka néhány elemének felhasználásával készítsetek térbeli alakzatokat az ábrán látható test mintájára! Mérjétek le a szükséges adatokat! A megfelelő darabok áthelyezésével határozzátok meg a test térfogatát!

Feladatok

1. Számítsd ki a téglatest térfogatát, ha adott az élek hosszúsága! Add meg, hány dl víz fér el benne!

a) 2,8 cm, 32 mm, 0,2 dm; *b)* 45 mm, 8,2 cm, 0,05 m;
c) 12 cm, 1,2 dm, 0,12 m; *d)* 3 cm, 30 mm, 0,3 dm.

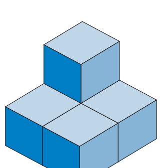
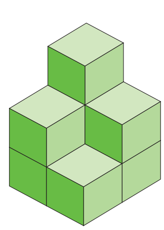
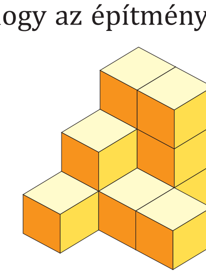
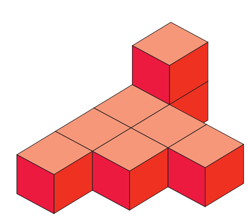
2. Van egy 60 cm magas, 80 cm széles, 180 cm hosszú fürdőkádunk. Belefér 800 liter víz? Válaszodat számítással igazold! Nézz utána, mennyi vizet használsz el egy 5 perces zuhanyzás alatt!

3. Adott a téglatest térfogata és két élének hosszúsága. Számítsd ki a harmadik él hosszát!

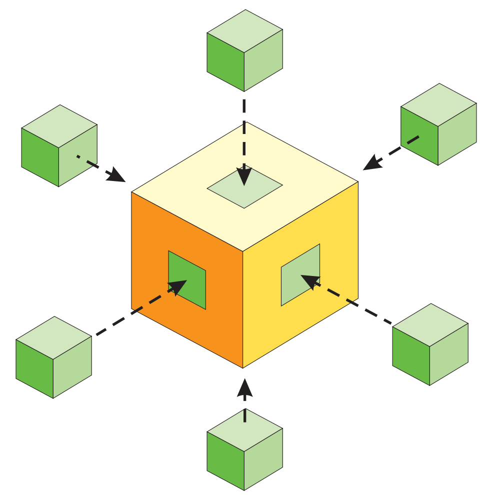
a) 2460 cm^3, 10 cm, 6 cm; *b)* 343 dm^3, 70 cm, 700 mm;
c) 450 mm^3, 8 mm, 9 mm; *d)* 625 m^3, 50 dm, 2500 cm.

4. Ha a téglatestet az 51,2 cm^2-es lapjával tesszük az asztalra, akkor 12 cm magas. Milyen magas, ha a 76,8 cm^2-es lapját rakjuk az asztalra?

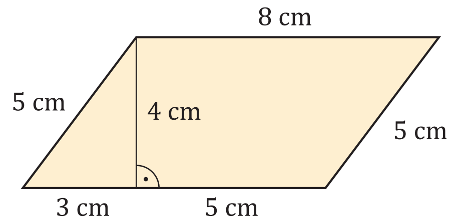
5. Legalább hány kis kocka hiányzik ahhoz, hogy az építményünk egy nagyobb kocka legyen?

6. Egy kocka minden lapjára kis kockákat ragasztunk. A kis kockák éleinek hosszúsága 1 cm, a kis kocka és a nagy kocka lapjának területaránya 1 : 9. Számítsd ki az így keletkező test felszínét és térfogatát!

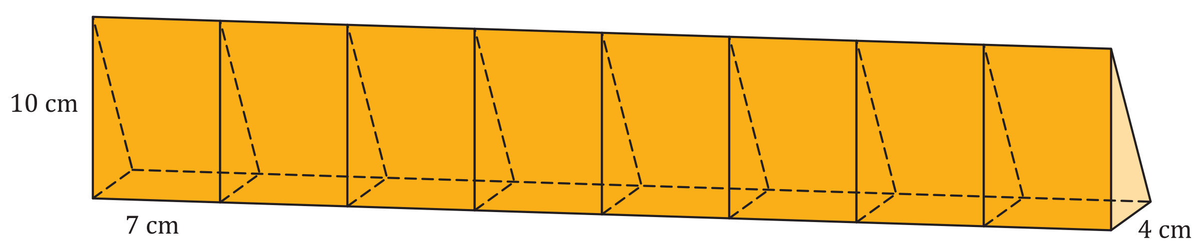


7. Egy teherautóval 2,4 méter hosszú négyszög keresztmetszetű vasrudakat szállítanak. A négyszög adatait az ábráról olvashatod le.

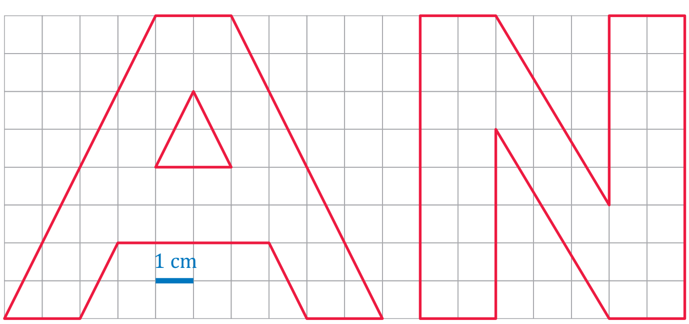


a) Hány darab rudat rakhatnak fel a teherautóra, ha 2 m^3-nél többet biztonsági okokból nem szállíthatnak?
b) Ezeket a rudakat le kell festeni. Mekkora a felülete egy ilyen rúdnak?

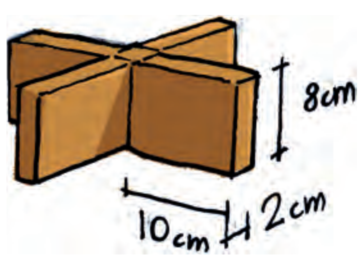
8. Jancsi néhány építőkockát kettéfűrészelt, és egymás mellé rakva összeragasztotta ezeket. Számítsd ki az így kapott test térfogatát!



9. Apa 1 cm vastag falemezből elkészítette Anna nevű kislánya nevének betűit. A betűsablont a képen látod. Mekkora a térfogata a kifűrészelt betűknek összesen?



10. Mekkora a képen látható fából készült test térfogata, ha a kereszt alakú test szárainak hossza 10 cm, a test magassága 8 cm, és a téglatestek szélessége 2 cm?



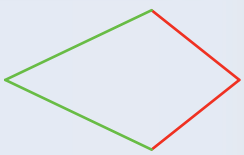
A tesztkérdések megoldásával átismételheted a terület- és térfogatszámítással kapcsolatos legfontosabb fogalmakat, összefüggéseket. Figyelj arra, hogy egy-egy kérdésnél több jó válasz is lehet! Jó munkát!

Tesztfeladatok

1. Egy egyenlő oldalú háromszög kerülete 264 dm. Hány méter hosszú az oldala?
A: 88 B: 0,88 C: 8,8 D: 264 : 3

2. Egy négyszög két-két szemközti oldala egyenlő hosszú. Két különböző oldalának hossza összesen 342 cm. Mekkora a kerülete?
A: 342 cm B: 684 cm C: 1328 cm D: 13,28 m

3. A képen látható négyszög egyik oldala 102 cm. A rövidebb és a hosszabb oldala közötti eltérés 42 cm. Hány centiméter a kerülete?
A: 4284 B: 324 C: 42,84 D: 492



4. Egy háromszög kerülete 2021 mm. Két oldalának hossza 777 mm és 999 mm. Milyen hosszú a harmadik oldal?
A: 24,5 cm B: 122,5 mm C: 245 mm D: 1,225 dm

5. Egy négyszög minden oldala centiméterben mérve egész szám. Hány centiméter lehet maximálisan a leghosszabb oldala, ha a kerülete 1701 cm?
A: 1695 B: 850 C: 851 D: 1642

6. Olyan négyszöget rajzoltunk, amelynek három oldala is egyenlő hosszúságú. Van 630 cm-es és van 205 cm-es oldala is. Mekkora a kerülete?
A: 8,35 m B: 1215 cm C: 20,95 méter D: Több mint 20 dm.

7. Egy négyszög mindkét átlója 38 cm hosszú, és a két átló merőleges egymásra. Mekkora a területe?
A: 722 cm^2 B: 1444 cm C: 144,4 dm^2 D:7,22 dm^2

8. Mekkora a területe annak a derékszögű háromszögnek, amelynek befogói 23 m és 42 m?
A: 48 300 dm^2 B: 966 m^2 C: 65 m^2 D: 483 m^2

9. Egy testet négy egybevágó trapéz és két különböző négyzet határol. Mennyi a lapok, élek, csúcsok számának szorzata?
A: 658 B: 648 C: 576 D: 586

10. Nyolc darab 9 cm élű kockát úgy rakunk egymás mellé, hogy középen marad egy 9 cm élű, kocka alakú lyuk. Mekkora az így kapott test térfogata?
A: 72 cm^3 B: 648 cm^3 C: 5832 cm^3 D: 5 dm^3-nél kevesebb.

11. Nyolc darab 3 cm élű kockát úgy rakunk egymás mellé, hogy középen marad egy 3 cm élű, kocka alakú lyuk. Mekkora a kapott test felszíne?
A: 432 cm^2 B: 288 cm^2 C: 2,64 dm^2 D: 4,32 dm^2

9. ÖSSZEFOGLALÁS

Feladatok

1. Add meg centiméterben és méterben a következő hosszúságokat!
a) 42 000 mm *b)* 130 dm *c)* 1,8 dm *d)* 0,6 km

2. Add meg grammban és dekagrammban a következő tömegeket!
a) 17 kg *b)* 0,23 kg *c)* 5,1 t *d)* 35 000 mg

3. Add meg percben és órában a következő időtartamokat!
a) 4320 s *b)* 1,5 nap *c)* 0,75 nap *d)* 0,5 hét

4. A szobamérleg 80,4 kg-ot mutatott, amikor Lóri ráállt a megrakott bevásárlókosárral együtt. A kosár nélkül a mérleg csak 75,8 kg-ot mutatott. Add meg a teli kosár tömegét kilogrammban, dekagrammban és grammban!

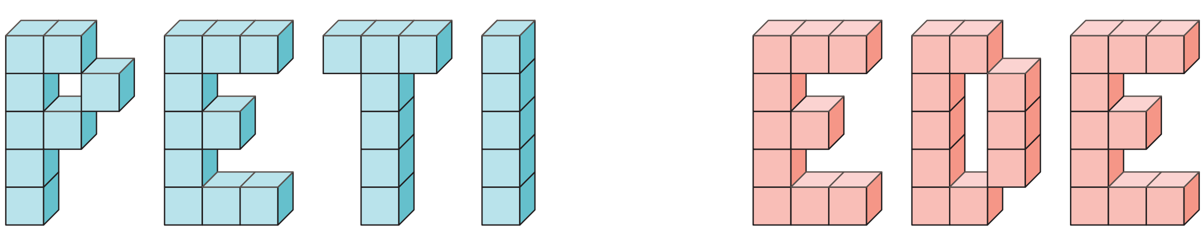
5. Egy téglalap alakú kert oldalainak hossza 30 méter és 42 méter. Milyen hosszúságú kerítésre lesz szükség, ha egy 3 méter széles részt ki kell hagyni kapunak?

6. Egy 30 cm kerületű sokszög minden oldala egyenlő hosszúságú, és centiméterben kifejezve a hosszuk egész szám. Hány oldalú lehet a sokszög? Add meg az összes lehetőséget!

7. Töhötöm meghatározta egy négyzet, egy háromszög, egy szabályos háromszög és egy téglalap kerületét. Ezeket az eredményeket kapta: 342 cm, 352 cm, 344 cm, 345 cm. Töhötöm sajnos összekeverte az eredményeket, és már nem tudja, hogy melyik szám melyik síkidomhoz tartozik. Arra emlékszik, hogy minden síkidom minden oldalának hossza centiméterben mérve egész szám volt. Vajon mi lehet a helyes párosítás?

8. Hányféle téglatest építhető nyolc darab egyforma kockából?

9. Peti kirakta a nevét kockákból. Ez megtetszett Edének is, aki szintén kirakta a nevét.



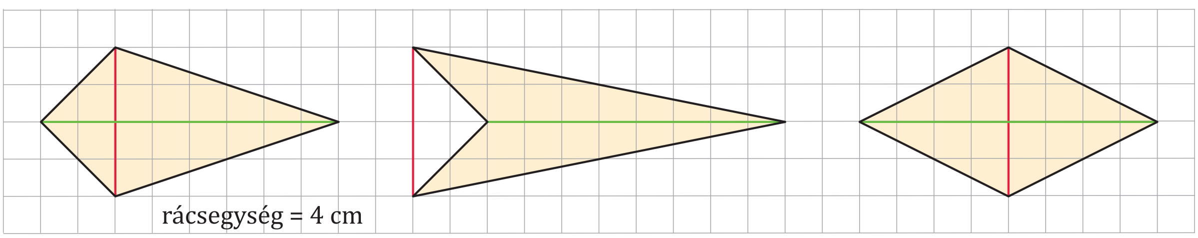
a) Melyikük használt fel több kis kockát a nevéhez?
b) Ha 1 cm élűek a kockák, akkor hány cm^2 a két fiú nevének felszíne?
c) Ha 2 cm élűek a kockák, akkor hány cm^3 a két fiú nevének térfogata?
d) Tervezd meg a KOCKA szót kis kockákból összerakva! Színezd ki a kis kockáit úgy, hogy térbeli kockáknak látsszanak!

10. Add meg négyzetméterben és négyzetcentiméterben a következő mennyiségeket!
a) 230 dm^2 *b)* 4 000 000 mm^2 *c)* 0,002 km^2 *d)* 0,5 ha
e) 72 dm^2 *f)* 240 000 mm^2 *g)* 0,0003 km^2 *h)* 0,01 a

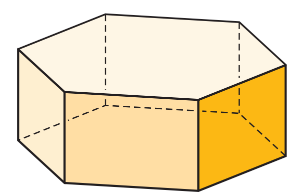
11. Melyik síkidom területe nagyobb? Mennyivel?

a) A 12 cm-szer 6 cm-es téglalapé vagy a 8,2 cm oldalú négyzeté?
b) A 34 mm-szer 4 mm-es téglalapé vagy a 16 mm és 17 mm befogójú derékszögű háromszögé?
c) A 7,8 cm oldalú négyzeté vagy az 5 cm-szer 12,17 cm-es téglalapé?
d) A 2 m-szer 6 m-es téglalapé vagy a 35 dm oldalú négyzeté?

12. Mekkora az ábrán látható négyszögek területe? A szükséges adatokat olvasd le az ábráról!



13. A képen látható desszertesdoboz alja és teteje egybevágó szabályos hatszög. A hatszög oldalai 8 cm hosszúak, a doboz magassága pedig 6 cm. Mekkora felületet kell körben a dobozra ragasztott címkével lefedni?



14. Add meg köbméterben és köbdeciméterben a következő mennyiségeket!

a) 230 000 cm^3; *b)* 48 000 cm^3; *c)* 3400 mm^3; *d)* 130 000 mm^3.

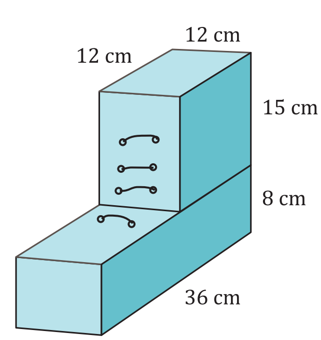
15. Add meg legalább egy olyan mértékegységgel a következő mennyiségeket, hogy a mérőszám kisebb legyen!

a) 1600 liter; *b)* 23 000 dl; *c)* 32 500 dl; *d)* 25 000 000 ml;
e) 230 000 cl; *f)* 17 320 dl; *g)* 1,2 liter; *h)* 221 500 000 ml.

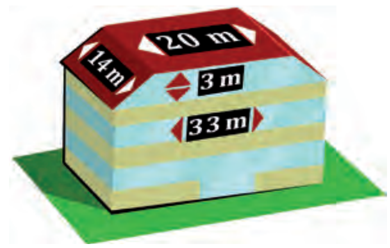
16. Hány liter víz van egy csordultig telt téglatest alakú akváriumban, amelynek a belső mérete: 32 cm-szer 55 cm-szer 40 cm?

17. A nyomtató tintapatronja téglatest alakú, oldalai 6 cm, 2,5 cm és 1,2 cm hosszúak. Hány ml a térfogata? Ha egy patron újratöltése 3200 Ft, akkor mennyibe kerül 1 liter ilyen tinta?

18. Egy hócipőt tekinthetünk két egymáson fekvő téglatestnek, ahol az egyik téglatest oldalai 12 cm, 36 cm és 8 cm, míg a másik téglatest oldalai 12 cm, 12 cm és 15 cm hosszúak. Hány liter folyadékkal tölthetünk meg egy hócipőt?



19. Egy épület vázlatát mutatja a rajz. Az ábráról az adatok is leolvashatóak. Mekkora a tetőtér térfogata?



20. Egy építkezés megkezdésekor az alap kiásása során 16 000 m^3 földet kell elszállítani. Négy darab 4 m^3-es és nyolc darab 6 m^3-es rakodórésszel rendelkező teherautó végzi a munkát. Hányszor kell fordulni a tizenkét teherautónak, hogy a földet elszállítsák?

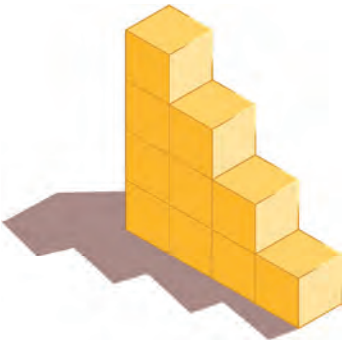
21. A gízai nagy piramis, más néven Kheopsz-piramis térfogata körülbelül 2 500 000 m^3.

a) Mekkora lenne egy ugyanekkora térfogatú 5 méter magas téglatest alapjának területe?
b) Ha 700 méter lenne ennek az 5 méter magas téglatestnek az egyik alapéle, akkor mekkora lenne a harmadik él?
c) Hány futballpályára lehetne lerakni a Kheopsz-piramis köveit úgy, hogy 5 méter magas téglatest alakú tömböt alkossanak? Egy futballpálya mérete körülbelül 105 méterszer 70 méter.

22. A főváros egyik játszóterén egy mászókáról készült ez a fénykép. A két test mindegyikét 12 darab egybevágó, 140 cm oldalú szabályos ötszög határolja. Máté elhatározta, hogy elkészíti egy ilyen testnek az élvázát, amihez 7 cm hosszúságú hurkapálcadarabokat fog felhasználni.

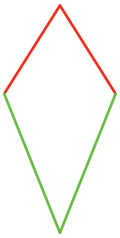
a) Összesen hány centiméter hosszúságú hurkapálcát fog Máté felhasználni?
b) Egy ötszög területe 33 700 cm^2. Hány négyzetméter egy ilyen test felszíne?

23. Egy téglalap alakú papírlap vastagsága 0,16 mm, a szélessége 21 cm, a hosszúsága pedig 30 cm. Képzeld el, hogy a papírt 1 cm^2-es négyzetekre vágod, és a négyzeteket egymásra helyezve egy négyzetes oszlopot építesz belőle.
a) Milyen magas lenne ez az oszlop?
b) Minimum hány darab ilyen papírra lenne szükség, hogy az oszlop magassága meghaladja a fél métert?



24. 5 cm élű kockákból építettük a képen látható lépcsőt. Mekkora az építmény felszíne és térfogata?

25. A képen látható négyszög azonos színnel jelölt oldalai egyforma hosszúak. Két, különböző színű oldalának összege 20,4 m.
a) Mekkora a négyszög kerülete?
b) Mekkora lesz a négyszög kerülete, ha a rövidebb oldalait 42 cm-rel növeljük, a hosszabb oldalait pedig 5,5 dm-rel csökkentjük?



VI. Statisztika

A gyerekek szomorkásan bámulták az ablak mögötti semmit.

– Fel a fejjel! Négy bolygón jártunk 12 nap alatt, az annyi, mint háromnaponta egy új hely. Érdemes volt a FérExszel jönni – szögezte le Gazsi.

– Kár, hogy indulunk haza, amikor van még egy pár hely, amit nem láttunk – toldotta meg Panni. – Jó lenne, ha még elmennénk valahová.

– Pár hely? A csillagok 17%-ának van bolygója, az nagyjából minden hatodik. Lenne hová menni – egészítette ki Attila. – Tudod hány katalógust böngésztünk át a hálón, amíg ezeket kiválasztottuk?

– Vigyázz! Ha véletlenszerűen ugrunk el valahová a térben, nagyon kicsi az esélye annak, hogy jó helyre jutunk. Nem számíthatunk arra, hogy egy csillagközi kíberűrflotta arra jár, és felvesz minket. Ennek nagyjából 0 az esélye, és ilyen csak a filmekben fordul elő – tette hozzá óvatosan Berta.

– Pedig izgalmas lenne. Gondoljatok bele, egy óriási katonai anyahajón hazamenni nem lenne utolsó dolog. Az egész hajónk elférne a dokk egyik sarkában, és mindenki velünk foglalkozna – ábrándozott Panni.

Elindultak, és a véletlennek fikarcnyi szerepe sem volt abban, hogy gond nélkül álltak pályára a Hold körül.

A bás játék

A játékhoz legalább 2 ember kell, de akkor a legélvezetesebb, ha 4-6 játékos játszik. Két kockára lesz szükségetek, és figyelnetek kell arra, hogy az általatok dobott számokat a többiek ne láthassák meg. Használhattok a dobáshoz bögrét, de a két kezetek is megteszi. A dobott számok közül a nagyobbat (ha van) tegyétek előre a tízes helyi értékre, a kisebbiket hátra, az egyesek helyére. Tehát például a 4, 5 dobás eredménye mindig 54, a 3, 2 dobásé pedig 32. Különlegesek azok az esetek, amikor egyformákat dobtok. A 11, ami 1-es bás, a 22, ami 2-es bás, ... és a 66, ami 6-os bás. A dobások értékei az itt megadott sorrend szerint nőnek:

31, 32, 41, 42, 43, 51, 52, 53, 54, 61, 62, 63, 64, 65, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 21

A 21-es dobás kiemelt helyen áll, és minden dobásnál erősebb. Mindenkinek nagyobbat kell dobnia, vagy legalábbis mondania, mint az előző játékosnak. Egyetlen kivétel van: 21-re csak 21-et lehet újra mondani. Ha egy körnek 21-gyel van vége, akkor a következő kör az ellenkező irányba indul el.

A játék menete:

Tegyük fel, hogy négy játékos üli körbe az asztalt, Gazsi, Helén, Imola és Jakab. Gazsi kezd, és dob a kockákkal úgy, hogy a többiek ne lássák. Dobás után mond egy számot. Helénnek két lehetősége van.

a) Elhiszi: ekkor ő dobhat, és nagyobbat kell dobnia, illetve mondania, majd halad tovább a kör Imola felé.

b) Nem hiszi el: ekkor Gazsinak meg kell mutatnia, mit dobott. Ha hazudott, akkor ő kap egy hibapontot, ha igazat mondott, akkor Helén.

Akinek 3 hibapontja lesz, az kiesik. Az győz, aki utolsónak marad.

Lássunk egy példát:

Gazsi kezd, dob, és azt mondja, 45. Erre azonnal kap egy hibapontot, mert ilyen érték nincs, 54-et kellett volna mondania.

Helén kezd: dob, és azt mondja, 61.

Imola jön: „Elhiszem” – mondja, mire Helén összerázza a kockákat, és átadja Imolának. Dob, de Imola dobása csak 52, ő viszont rezzenéstelen arccal közli, hogy 2-es bás.

Jakab jön: „Elhiszem” – mondja, mire Imola sóhajtva összerázza a kockákat, és átadja neki. Jakab dob, és azt mondja, 21.

Gazsi jön: „Nem hiszem el!” – mondja, mire Jakab mosolyogva mutatja meg a 21-et, a 2-est és az 1-est a kockákon, és Gazsi kap egy hibapontot. A következő játékot Gazsi kezdi, hiszen ő a soros, és megfordul a kör iránya, mert 21-gyel fejeződött be.

Játsszatok néhány partit! Mérlegeljétek, hogy mikor érdemes dobni, mikor hinni és mikor kételkedni!

Gazsi	Helén	Imola	Jakab	Gazsi
	Új játék	Elhiszem	Elhiszem	Nem hiszem
Dobásai: 4 és 5	Dobásai: 1 és 6	Dobásai: 2 és 5	Dobásai: 1 és 2	
45	61	2-es bás	21	Új játék
45-öt nem lehet mondani: 1 hibapont		Ha Imola nem hitte volna el, akkor hibapontot kapott volna, mert Helén az igazat mondta.	Ha Jakab nem hitte volna el, akkor nyer, mert Imola nem mondott igazat.	Gazsi veszít, mert Jakab igazat mondott. 1 hibapont

Középső játék

Hasonlít az egyszám játékhoz, de egy kicsit több számolással jár. Az osztály tagjai felírnak egy 1 és 100 közötti egész számot. Amikor mindenki kész van, összegyűjtik a számokat, például a tanár felírja azokat a táblára. Nagyság szerint sorba állítják a számokat. Ha a tanulók száma páratlan, akkor az a tanuló nyer, aki a középső számot írta. Ha a tanulók száma páros, akkor a két középső számot író tanuló nyer. Ha többen írják ugyanazt a nyerő számot, akkor többen is nyerhetnek.

Például, ha 25 gyerek jár az osztályba és a felírt számok: 1, 2, 45, 56, 5, 54, 35, 67, 3, 53, 4, 43, 4, 5, 70, 87, 7, 56, 4, 45, 35, 65, 6, 3, 5.

Egy kényelmes rendezési lehetőséget mutat a mellékelt táblázat. Pirossal kiemeltük a nyerő számot, ami most a 35. Ketten is írták ezt a számot, tehát ketten is nyernek. Ha egy 26. gyerek is volna az osztályban, aki 10-est írna, akkor a 10 és a 35 lenne a két középső szám, tehát összesen 3 gyerek nyerne.

Tízesek	Egyesek
0	1, 2, 5, 3, 4, 4, 5, 7, 4, 6, 3, 5
1	
2	
3	**5**, **5**,
4	5, 3, 5
5	6, 4, 3, 6
6	7, 5,
7	0
8	7
9	

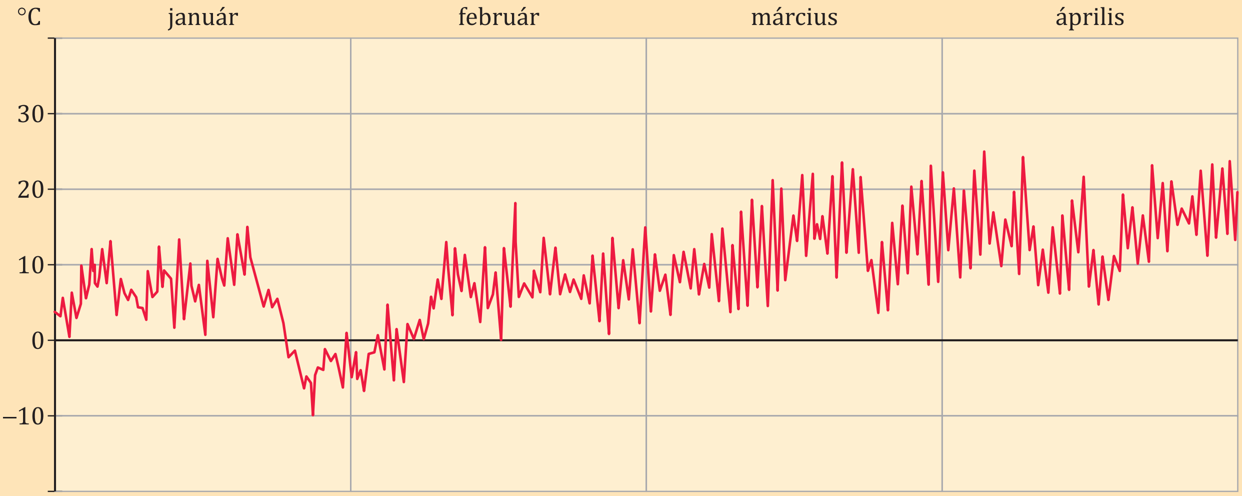
2. GRAFIKONOK, DIAGRAMOK, ÖSSZEFÜGGÉSEK

A mennyiségek közti összefüggéseket grafikonnal tudjuk szemléletessé tenni. A derékszögű koordináta-rendszerben rajzoljuk a grafikonokat, és a tengelyeken jelenítjük meg az összetartozó mennyiségek nevét és mértékegységüket.
A koordináta-rendszert sokszor **Descartes-féle koordináta-rendszernek** nevezzük.
Az adatok ábrázolására nagyon változatos diagramokat is használunk.

René Descartes (ejtsd: röné dékárt) (1596–1650) francia filozófus, matematikus és természettudós, katolikus nemesi családban született. A jezsuita kollégium után jogi diplomát szerzett, majd matematikát és erődépítészetet tanult. Sokat utazott. Többek között járt Lengyelországban, Magyarországon és Csehországban is. Meg akarta magyarázni a természet minden jelenségét, tanulmányaiban írt például a légköri jelenségekről, a fénytörésről és a geometriáról is. Descartes idejében a matematika már fejlett tudomány volt, és ebben neki is jelentős szerep jutott. Ő volt, aki a matematikai összefüggések ábrázolására a koordináta-rendszert ajánlotta.

1. példa

Szekszárdon 2014-ben az első négy hónapról egy automata hőmérő a következő hőmérsékleti diagramot rajzolta. (Forrás: www.csatolna.hu)



a) Miért ennyire „cikcakkos” az ábra?
b) Melyik hónapban mérték a legmagasabb hőmérsékletet?
c) Márciusban mennyi volt a hőmérsékleti minimum?
d) Melyik hónapokban volt fagypont alatti hőmérséklet is?

Megoldás

a) A hőmérséklet éjszakára lehűl a nappalihoz képest. Ezeket a változásokat mutatja az ábra a „hirtelen” ugrásokkal.
b) A piros görbe áprilisban ugrik a legmagasabbra, vagyis ekkor mérték a legmagasabb hőmérsékletet.

c) Az ábráról pontos értéket nem tudunk leolvasni, de azt látjuk, hogy a görbe több helyen is megközelíti a nulla szintet. Körülbelül 2-3 fok lehet ez a hőmérsékleti minimum.

d) A görbe január végén és február elején van a nulla szint alatt, vagyis ebben az időszakban volt a hőmérséklet a fagypont alatt.

Adatok ábrázolásához gyakran használunk diagramokat. Ötödik osztályban találkoztunk **oszlopdiagrammal**. Ez csak egy a rengeteg lehetséges diagramtípus közül.

Ha az egyes értékeket pontokkal szemléltetjük, hasonlóan ahhoz a módszerhez, mint amikor koordinátarendszerben ábrázolunk pontpárokat, akkor **pontdiagramot** kapunk. Pont helyett kis kört, négyzetet, egymást metsző, pontot szemléltető vonalakat is rajzolhatunk, ez mit sem változtat azon, hogy pontdiagramnak hívjuk a diagramot.

Ha a kapott pontokat összekötjük, akkor egy szakaszokból álló töröttvonalat kapunk, amit **vonaldiagramnak** hívunk. Ezt elsősorban olyankor szoktuk használni, ha az összekötő szakasz pontjai is tartozhatnak valamilyen értékhez, például hőmérséklet időbeni változása esetén. Előfordulhat, hogy olyankor is használunk vonaldiagramot, amikor az összekötő szakasz pontjai nem hordoznak információt a közbenső értékekről. Ilyen esetekben a pontok összekötésével a növekedést vagy a csökkenést szeretnénk megmutatni, például árváltozások esetén.

Nincs szabály arra, hogy mikor melyik diagramot kell használnunk.

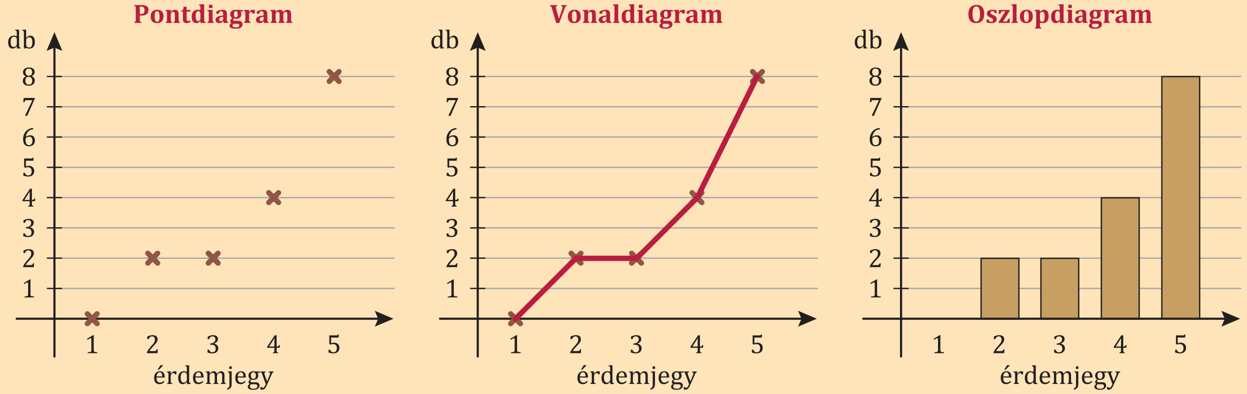
2. példa

A hatodikos csoport megkapta a matematikadolgozatát. 8 darab ötös, 4 darab négyes, 2 darab hármas és 2 darab kettes érdemjegy született. Ábrázoljuk az elért eredményeket pont-, vonal- és oszlopdiagramon!

Megoldás

A pontdiagramnál minden jegyhez teszünk egy pontot a megfelelő helyre. Az egyeshez 0 magasságba, a ketteshez és a hármashoz 2 magasságba, a négyeshez 4, az ötöshöz 8 magasságba.

Ha a pontdiagramnál kapott pontokat összekötjük, akkor vonaldiagramot kapunk. Ebben az ábrázolásban az összekötő szakaszok csupán azt hangsúlyozzák, hogy a jobb jegyet elérők száma egyre nagyobb. Mivel egyes érdemjegy nem volt, ezért az oszlopdiagramon erre a helyre 0 magas oszlopot kellene rajzolnunk, azaz ide nem rajzolunk oszlopot.



Kutatómunka

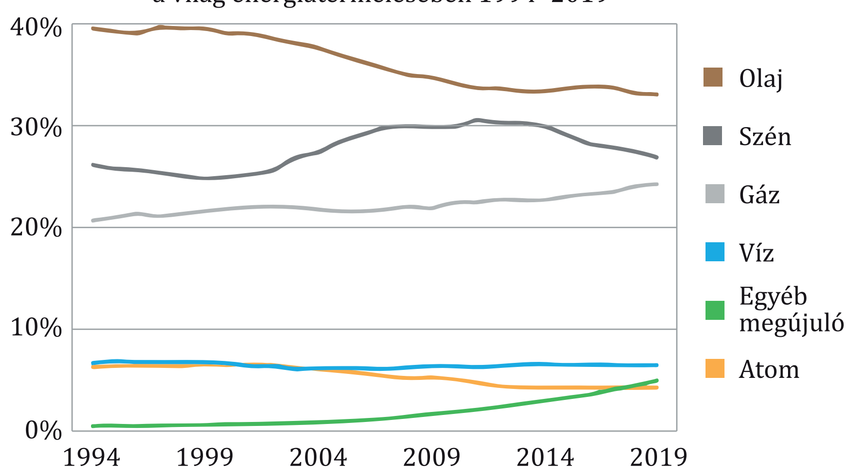
Keress újságokban, katalógusokban grafikonokat, diagramokat! Ha nincsenek otthon újságok, akkor kereshetsz az interneten is diagramokat. Válassz egy érdekeset, és mutasd meg az osztálytársaidnak!

Csoportmunka

Alkossatok két csoportot! Az egyik csoport érveljen a hagyományos energiahordozók, a másik csoport pedig a megújuló energiahordozók mellett!

Mit gondoltok, igaz-e a grafikon szerint, hogy kevesebb olajat használtak 2019-ben, mint 1994-ben?

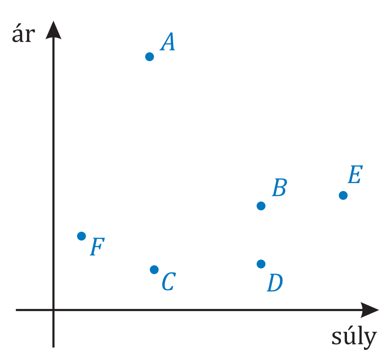
Az egyes energiahordozók százalékos aránya a világ energiatermelésében 1994–2019



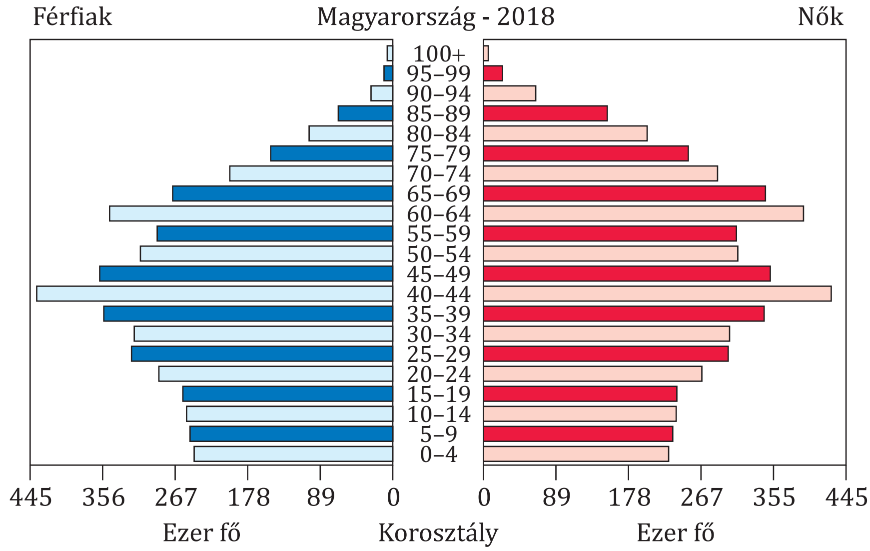
Feladatok

1. Hat különböző helyen őrölt diót vásároltunk. A hat csomag árát és súlyát mutatja a grafikon. Minden pont a koordináta-rendszerben egy-egy konkrét csomagra vonatkozik. Válaszolj a következő kérdésekre, annak ellenére, hogy a tengelyeken nem látod az értékeket! Döntéseidhez használhatsz vonalzót.

a) Melyik a legolcsóbb csomag?
b) Melyik a legnehezebb?
c) A hat között van-e azonos súlyú?
d) Vannak-e olyanok, amelyekért ugyanannyit kellett fizetni?
e) Az *A* és a *D* csomag közül melyiket gondolod jobb vételnek?
f) A *C* és a *D* közül szerinted melyiket érdemes inkább megvenni?
g) Vannak-e olyan csomagok, amelyek egyformán jó vételnek számítanak?



2. A grafikonon Magyarország korfája látható.



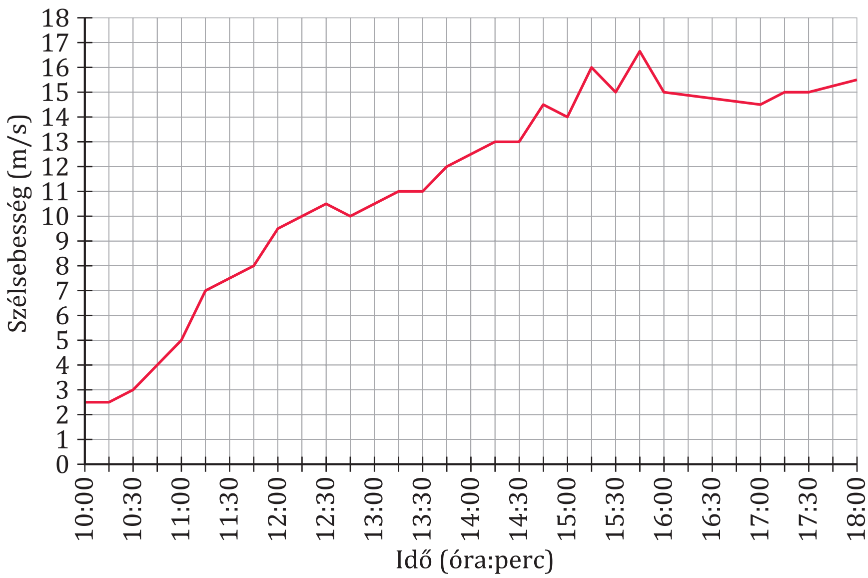
a) Keresd meg a „fa” törzsén a te korosztályodat!
b) Hány olyan gyerek élt 2018-ban Magyarországon, aki veled azonos korosztályba tartozik? A lányok vagy a fiúk voltak többen?
c) Melyik korosztály a legnépesebb?
d) A fa nem szimmetrikus a törzsére. Ez mit jelent a lakosságra nézve?

3. A táblázat a 2019-ben született gyerekeknek választott leggyakoribb keresztneveket mutatja. Tudjuk, hogy körülbelül 89 200 gyermek született ebben az évben Magyarországon.

Sorszám	Férfinevek	A nevet első keresztnév-ként viselők száma	Női nevek	A nevet első keresztnév-ként viselők száma
1.	Bence	1442	Hanna	1494
2.	Máté	1320	Anna	1128
3.	Levente	1194	Zoé	989
4.	Dominik	1144	Luca	875
5.	Marcell	1133	Léna	871
6.	Noel	1127	Emma	831
7.	Ádám	1081	Zsófia	704
8.	Dániel	999	Lili	699
9.	Dávid	963	Boglárka	634
10.	Olivér	954	Mira	599

a) Az ebben az évben született gyerekek hányad része kapta a 10 leggyakoribb nevet?
b) Készíts oszlopdiagramot a 4 leggyakoribb fiú- és a 4 leggyakoribb lánynévről! Az adatokat kerekítsd százas pontosságra!

4. A Balatonon a vitorlázók és a fürdőzők biztonsága érdekében 12,5 $\frac{m}{s}$ szélsebességtől elsőfokú viharjelzés, 16,6 $\frac{m}{s}$ felett pedig másodfokú viharjelzés lép életbe. A következő grafikon a tónál elhelyezett szélsebességmérő berendezésének adatait mutatja.



a) A vizsgált időszakban hány percig volt elsőfokú viharjelzés?

b) A vizsgált időszakban hány percig volt másodfokú viharjelzés?

c) Mikortól nem kölcsönözhetőek a vízibiciklik, ha egy rendelet szerint másodfokú viharjelzés esetén már nem tartózkodhatnak a tavon?

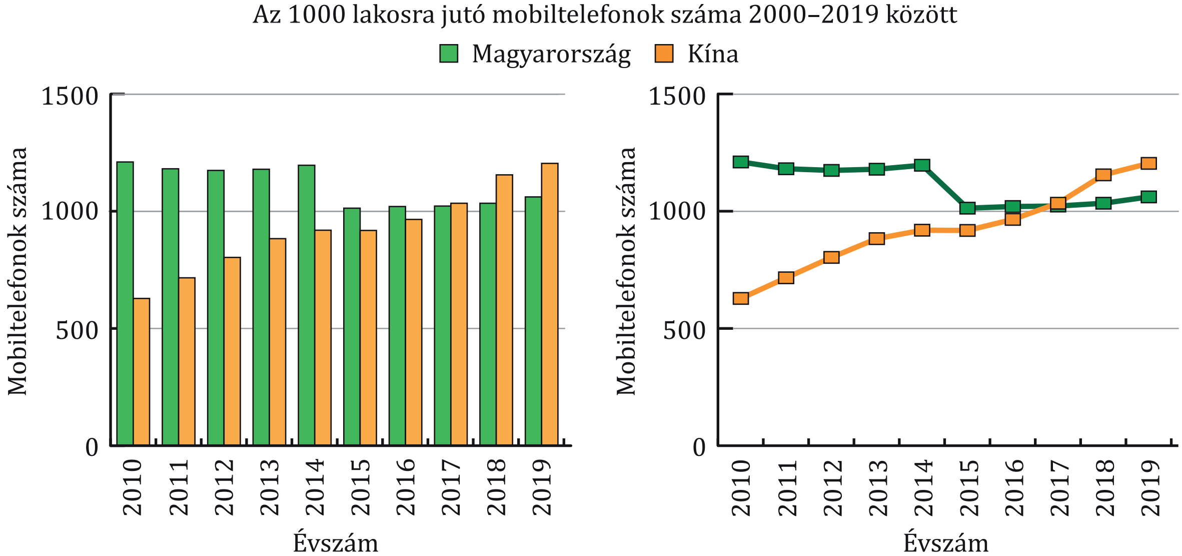
d) Mikor indul el a Vízi család vitorlással a part felé, ha reggel megbeszélték, hogy az elsőfokú viharjelzésnél indulnak kifelé?

5. A két grafikonon ugyanazokat az adatokat ábrázoltuk. Te melyiket tartod szemléletesebbnek? Miért?

a) Melyik évben haladta meg először Kínában az 1000 lakosra jutó mobiltelefonok száma a magyarországi értékeket?

b) Nézz utána, mi mindenre használják Kínában a mobiltelefont!

Az 1000 lakosra jutó mobiltelefonok száma 2000–2019 között

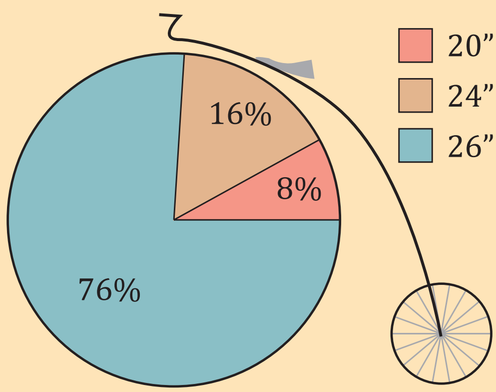


Vannak olyan adatok, amelyek esetében szemléletesebb, ha nem oszlop, hanem kör alakú diagramon, röviden **kördiagram**on szemléltetjük azokat.
Nemcsak az adatok egymáshoz viszonyított arányát, hanem az egyes részek és az egész viszonyát is jól lehet szemléltetni ilyen ábrán. A diagramon szereplő adatokat gyakran százalékos alakban adjuk meg.

Vigyázz! Ha tudjuk, hogy az osztályban a fiúk és a lányok aránya 1 : 1, akkor ebből még nem tudjuk megmondani, hogy hányan vannak az osztályban. Lehet például 10 fiú és 10 lány, de 14 fiú és 14 lány is.
Ha az adatok száma nem ismert, akkor pusztán a kördiagramon feltüntetett arányokból nem lehet következtetni az egyes esetek számára.

1. példa

A Tisza-parti kölcsönzőben összesen 50 darab biciklit tartanak, melyek kerékmérete 20, 24 vagy 26 col (jele ”). Olvasd le a diagramról, hogy melyik méretű bicikliből hány darab van a kölcsönzőben!



Megoldás

Készítsünk táblázatot a kördiagram adatai alapján!

	Százalék (%)	Számítás menete	Kerékpárok száma (db)
Összes kerékpár	100		50
Egy darab kerékpár	2		1
20”-os kerékpár	8	$\frac{50}{100} \cdot 8 = 50 \cdot 0{,}08 = 4$	4
24”-os kerékpár	16	$\frac{50}{100} \cdot 16 = 50 \cdot 0{,}16 = 8$	8
26”-os kerékpár	76	$\frac{50}{100} \cdot 76 = 50 \cdot 0{,}76 = 38$	38

A különböző méretű kerékpárokból 4 db, 8 db és 38 db volt a kölcsönzőben.

2. példa

Az iskolában a használt elemeket külön gyűjtőedénybe lehet bedobni. Az egyik kiürítésnél a következő típusú és darabszámú elem került elő belőle:

Készíts kördiagramot a táblázat adatai alapján!

A körnek hányad része tartozik egy-egy elemtípushoz?

Szerinted a képen látható elemek közül melyik nem szerepel a táblázatban?

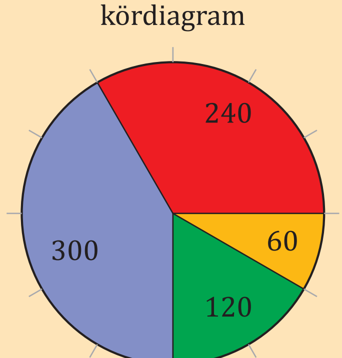
elem típusa	darabszám
AAA	240
AA	300
9 V-os elem	120
bébielem	60

Megoldás

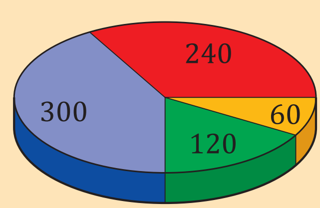
Annak megállapításához, hogy az egyes elemtípusok a teljes kör hányad részét jelentik, szükségünk van az elemek számának összegére: 240 + 300 + 120 + 60 = 720.
Tehát összesen 720 elem volt a gyűjtőedényben.
Az egyes részek arányaival kiegészítettük a megadott táblázatot.
A részekhez tartozó arányokat, és így a kör megfelelő hányadát a táblázatban látható módon kiszámolhatjuk. Például az AAA elemekhez a kör $\frac{240}{720} = \frac{1}{3}$ része tartozik. A teljes kör 360°-os, ennek harmada 120°.
Hasonlóan számolható ki a többi rész is. A szögmérőnkkel felmérhetjük ezeket, egyiket a másik után.
A részeket a jobb szemléltetés érdekében ki szoktuk színezni.

Elem típusa	Darabszám	Arány	Közös nevezőjű törttel	Szög
AAA	240	$\frac{240}{720} = \frac{1}{3}$	$\frac{240}{720} = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$	$360° \cdot \frac{4}{12} = 120°$
AA	300	$\frac{300}{720} = \frac{5}{12}$	$\frac{300}{720} = \frac{5}{12}$	$360° \cdot \frac{5}{12} = 150°$
9 V-os elem	120	$\frac{120}{720} = \frac{1}{6}$	$\frac{120}{720} = \frac{1}{6} = \frac{2}{12}$	$360° \cdot \frac{2}{12} = 60°$
bébielem	60	$\frac{60}{720} = \frac{1}{12}$	$\frac{60}{720} = \frac{1}{12}$	$360° \cdot \frac{1}{12} = 30°$

kördiagram



térbeli kördiagram (tortadiagram)



A térbeli kördiagram sokak szerint szebb, de az arányokat eltorzítja.

A képen a legnagyobb, a D jelű góliátelem nem szerepel a táblázatban.

Feladatok

1. Az osztályban félévkor 7 tanuló jeles, 4 jó, 8 közepes és 5 elégséges osztályzatot kapott nyelvtanból. Szemléltesd ezeket az adatokat pont-, oszlop- és kördiagramon is!

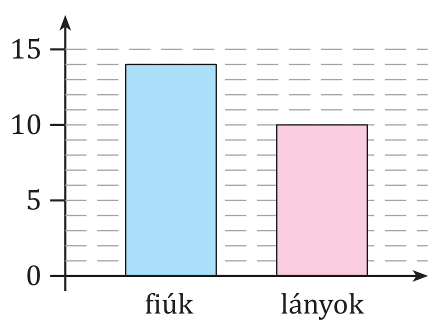
2. Matyi a képen látható vicces pólóban ment suliba.

a) Készíts kördiagramot a pólóján szereplő adatok alapján!

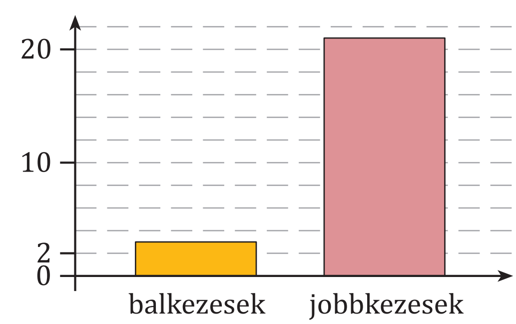
b) Készíts oszlopdiagramot a pólóján szereplő adatok alapján!

3. Készíts kördiagramot az oszlopdiagramok adatai alapján!

Az osztályba járó fiúk és lányok száma



Az osztályba járó bal- és jobbkezesek száma



Készítsd el a diagramokat a saját osztályod adatai alapján is!

4. Megkérdeztek 30 gyereket, hogy milyen szerepet vállalnának egy rockegyüttesben, és a válaszokat kördiagramon ábrázolták.

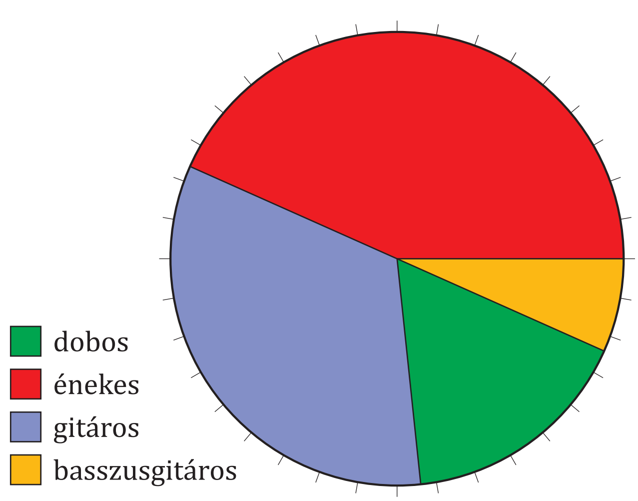
a) A kör hányad része tartozik egy gyerekhez?

b) A kör hányad része tartozik a basszusgitárosokhoz? Hányan akarnak basszusgitárosok lenni? Becsülj, következtess!

c) A kör hányad része tartozik az énekesekhez? Hányan akarnak énekesek lenni?

d) Hány gyerekkel kevesebb akar dobolni, mint gitározni?

e) Készíts az adatokból oszlopdiagramot!



5. A német futballbajnokság 2019/20-as idényében 30 forduló után az első három helyezettet és az addigi eredményeiket tartalmazza a táblázat.

		Csapatok neve	Győzelem	Döntetlen	Vereség	Gólarány
1.		Bayern München	22	4	4	90 : 30
2.		Dortmund	19	6	5	81 : 35
3.		RB Leipzig	16	11	3	75 : 32

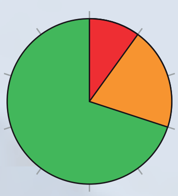
Készíts mindegyik csapathoz egy-egy kördiagramot, amelyiken a győzelmeket, a döntetleneket és a vereségeket szemlélteted!

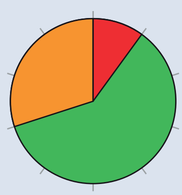
a) A kör mekkora része tartozik egy fordulóhoz?

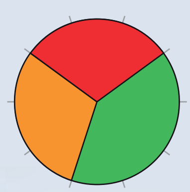
b) A kör mekkora részei tartoznak az egyes csapatok győzelmeihez, döntetleneihez és vereségeihez?

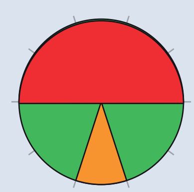
Tesztfeladatok

1. Egy oroszláncsaládot egy hím, három nőstény és hat kölyök alkot. Melyik diagram szemlélteti a család összetételét?

A: 

B: 

C: 

D: 

2. Egy 24 fős osztályban 9 fiú van és 15 lány. A kör hányad része szemlélteti a fiúkat egy kördiagramon?

A: $\frac{3}{8}$ B: $\frac{5}{24}$ C: $\frac{5}{8}$ D: Nem lehet kiszámolni.

3. Egy 24 fős osztályban 9 fiú van és 15 lány. A kör hányad része szemlélteti a lányokat egy kördiagramon?

A: $\frac{3}{8}$ B: $\frac{5}{24}$ C: $\frac{5}{8}$ D: Nem lehet kiszámolni.

4. Az eladott autók száma típusonként: Batmobil 12; Időgépautó 15. Hány százalékos rész szemléltetné a Batmobilokat egy kördiagramon?

A: ≈ 44,4% B: ≈ 22,2% C: ≈ 88,8% D: ≈ 155,6%

5. Az iskola tanulóinak 2%-a vörös, 29%-a szőke, 54%-a barna és 15%-a fekete hajú. Hányan járnak az iskolába?

A: 100 B: 200 C: 248 D: Nem lehet kiszámolni.

1. példa

A táblázat a Toldi első énekében előforduló betűk számát tartalmazza. Az adatok összeszámlálásához és a műveletek elvégzéséhez zsebszámológépet, illetve a mobiltelefon számológépét is használtuk. (A kettős betűket külön számoltuk, azaz például a táblázatban az sz egy darab s-et és egy darab z-t jelent.)

a	á	b	c	d	e	é
351	123	75	33	84	287	128
f	g	h	i	í	j	k
37	132	71	155	13	54	156
l	m	n	o	ó	ö	ő
225	127	233	129	20	44	17
p	q	r	s	t	u	ú
35	0	166	223	217	27	28
ü	ű	v	w	x	y	z
15	6	89	0	0	105	141

a) Hány magán- és hány mássalhangzó van az első énekben?
b) A betűk hányad része magán-, illetve mássalhangzó? Írjuk fel százalékos alakban is!
c) Ábrázoljuk a magán- és mássalhangzók számát oszlop- és kördiagramon!

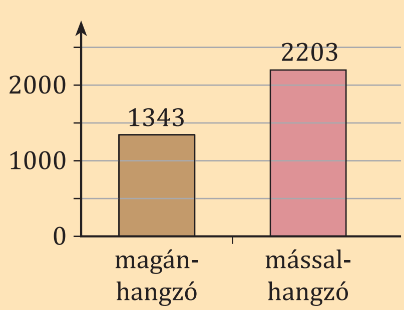
Megoldás

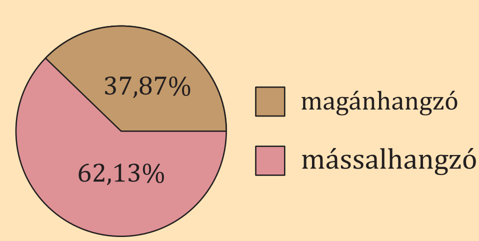
a) Össze kell adni a táblázat megfelelő elemeit.

Magánhangzó	Mássalhangzó	Összesen
1343	2203	3546

b) A betűk $\frac{1343}{3546} \approx 0{,}3787$ része magánhangzó. A betűk körülbelül 37,87%-a magánhangzó.
A betűk $\frac{2203}{3546} \approx 0{,}6213$ része mássalhangzó. A betűk körülbelül 62,13%-a mássalhangzó.

c) Az ábrázolásnál vegyük fel a vízszintes tengelyen a magánhangzókat és a mássalhangzókat. Rajzolhatjuk például úgy, hogy az első oszlop körülbelül 13-14 milliméter, a második 22 milliméter magas lesz. Ekkora adatok esetén ez elegendő pontosság.
A kördiagram rajzolásához számoljuk ki, hogy a kör hányad része szemlélteti a magán-, illetve a mássalhangzókat. A teljes kör 360°. A magánhangzókat szemléltető részhez ennek kell az $\frac{1343}{3546}$-od részét, vagy mint a *b)* részben kiszámoltuk 37,87%-át venni. A következtetéses módszerrel ez $360° \cdot \frac{1343}{3546}$ vagy százalékokkal $\frac{360°}{100} \cdot 37{,}87 \approx 136°$.
Ezt már fel tudjuk mérni a szögmérőnkkel.

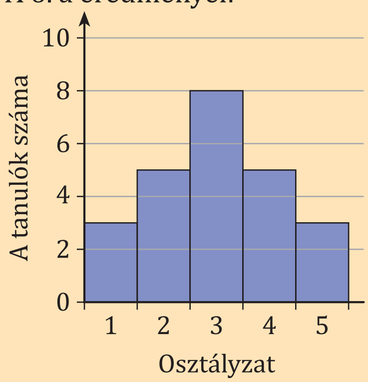




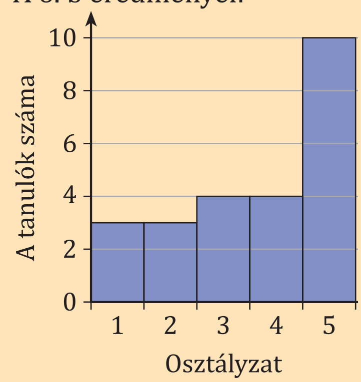
2. példa

Az iskola négy hatodik osztályában ugyanazt a felmérőt íratták, majd ábrázolták a kapott osztályzatok darabszámát.

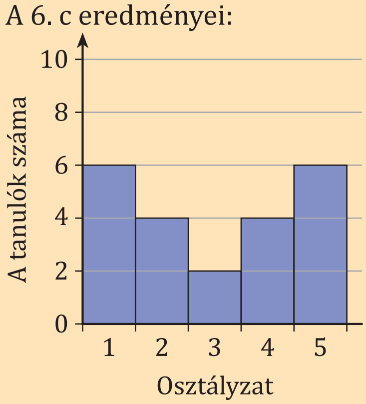
A 6. a eredményei:



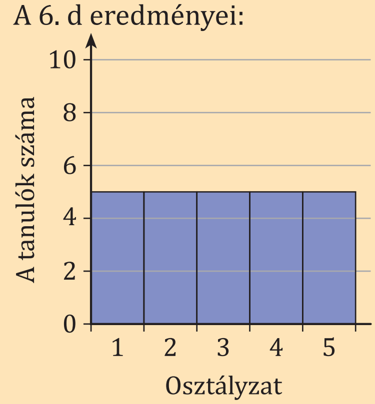
A 6. b eredményei:



A 6. c eredményei:



A 6. d eredményei:



a) Rendeljük a felsorolt tulajdonságokat az egyes grafikonokhoz: állandó, egycsúcsú, ferde, kétcsúcsú, szimmetrikus! Ugyanazzal a tulajdonsággal több grafikon is rendelkezhet.
b) Hány gyerek jár az egyes osztályokba?
c) Számítsuk ki az osztályátlagokat!
d) Mely esetekben lehetne számolás nélkül meghatározni az átlagot?
e) A 6. a és a 6. d osztály eredményeit ábrázoljuk kördiagramon is!
f) A 6. b és a 6. c osztály eredményeit ábrázoljuk pont- és vonaldiagramon is!

Megoldás

a) A 6. a grafikonja egycsúcsú, szimmetrikus.
A 6. b grafikonja egycsúcsú, ferde.
A 6. c grafikonja kétcsúcsú, szimmetrikus.
A 6. d grafikonja állandó, szimmetrikus.

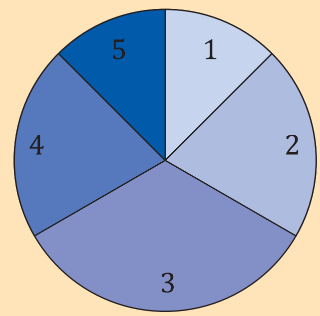
b) és *c)* A két kérdésre egyetlen táblázatban adjuk meg a válaszokat. A számolást csak a 6. a esetében részletezzük, a többi osztálynál hasonlóan számolhatunk.
A jegyek összege a 6. a-ban 3 db egyes, 5 db kettes, 8 db hármas, 5 db négyes és 3 db ötös, azaz

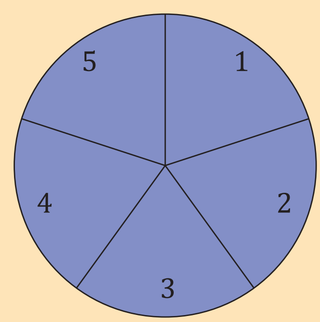
$3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 72.$ A 6. a átlaga: $\frac{72}{24} = 3.$

	Osztályzatok					Tanulók száma	Jegyek összege	Átlag
	1	2	3	4	5			
6. a	3	5	8	5	3	24	72	3
6. b	3	3	4	4	10	24	87	3,625
6. c	6	4	2	4	6	22	66	3
6. d	5	5	5	5	5	25	75	3

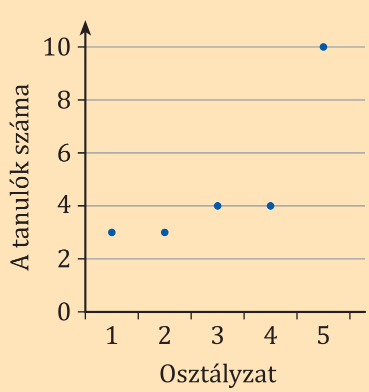
d) A szimmetrikus esetekben az átlag mindig a középső elem, hiszen az ettől vett pozitív és negatív irányú eltérések kiegyenlítik egymást.

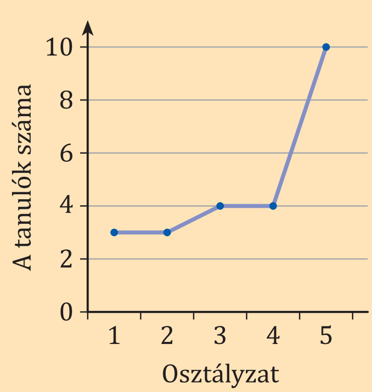
e) A 6. a osztályban 3 + 5 + 8 + 5 + 3 = 24 gyerek írta meg a felmérőt. Az egyes osztályzatokhoz a kör megfelelő hányada tartozik, tehát a kört is ennek megfelelően kell felosztani.
Következtessünk!
A kör $\frac{1}{24}$ része $\frac{360°}{24} = 15°$, ezért $\frac{3}{24}$ rész $3 \cdot 15° = 45°$.
Hasonlóan $\frac{5}{24}$ rész $5 \cdot 15° = 75°$ és $\frac{8}{24}$ rész $8 \cdot 15° = 120°$.
A teljes kört tehát $360° = 45° + 75° + 120° + 75° + 45°$ részekre kell osztani.
A 6. d osztály esetében sokkal egyszerűbb dolgunk van, hiszen csak 5 egyenlő részre kell osztanunk a kört. Egy rész ezért $\frac{360°}{5} = 72°$.

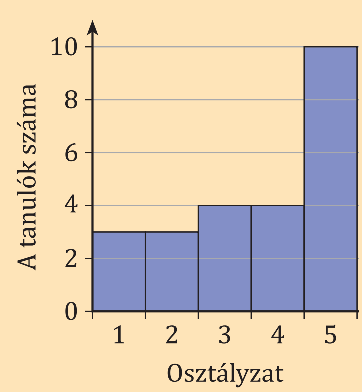




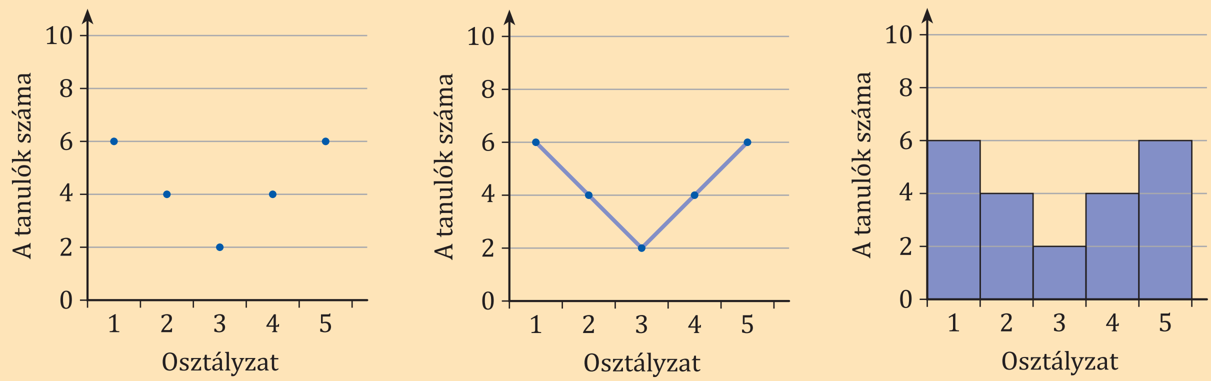
f) Az adatokat vonaldiagramon ábrázolni könnyebb és gyorsabb, mint kördiagramon. Csak a megfelelő magasságban lévő pontokat kell összekötni.
A 6. b osztály eredményeihez tartozó pont-, vonal- és oszlopdiagram egymás mellett.







A 6. c osztály eredményeihez tartozó pont-, vonal- és oszlopdiagram egymás mellett.



3. példa

Angelikának eddig két darab ötöse volt matekból. Az utolsó röpdolgozatát nagyon elrontotta, ezért Csörsz tanár úr teljesen jogosan 1/2-re értékelte. Amikor az elektronikus naplóba ezt külön akarta bejegyezni egy 1-es és egy 2-es jegyként, Angelika élénken tiltakozott. Azt kérte, inkább kapjon 1-est.

a) Miért kérhette ezt Angelika? Hogyan alakul az átlaga a két esetben?

b) Pandora korábbi jegyei 2, 2, 4, és ő is 1/2-et kapott a röpdolgozatára. Hogyan alakul Pandora jegyeinek átlaga a fenti két esetben?

Megoldás

a) Számoljunk átlagokat!

Ha az elektronikus naplóban a következő jegyek vannak: 5, 5, 1, 2, akkor az átlag

$$\frac{5+5+1+2}{4} = \frac{13}{4} = 3{,}25 \approx 3.$$

Ha csak három jegy, az 5, 5, 1 lesz a naplóban, akkor az átlag $\frac{5+5+1}{3} = \frac{11}{3} \approx 3{,}7 \approx 4.$

Egy rossz „feles" jegy két jegyként történő rögzítése tehát duplán büntethet, míg egy jó „feles" jegy két jegyként történő rögzítése duplán jutalmazhat.

b) Pandora átlaga, ha két jegyként írják be az 1/2-et:

$$\frac{2+2+4+1+2}{5} = \frac{11}{5} = 2{,}2 \approx 2.$$

Pandora átlaga, ha csak egy 1-est kap:

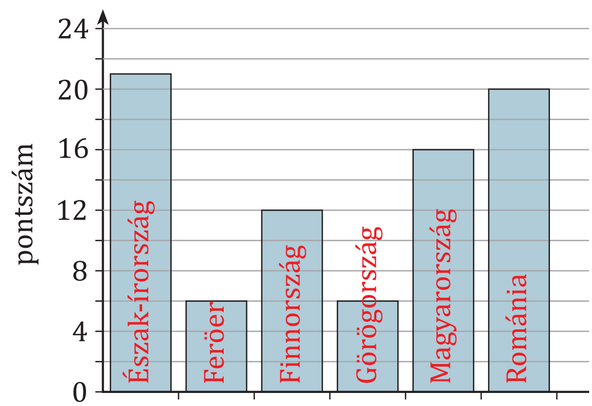
$$\frac{2+2+4+1}{4} = \frac{9}{4} = 2{,}25 \approx 2.$$

Pandora átlagán nem sokat változtat, hogy egy vagy két jegyként kerül rögzítésre a dolgozat eredménye.

Beszéljétek meg, mi a különbség Angelika és Pandora esete között!

Feladatok

1. A grafikon alapján válaszolj a kérdésekre!



a) Melyik csapat szerezte a legtöbb pontot?
b) Hányadik lett Magyarország?
c) Hány pontot szerzett Görögország?
d) Keresd meg a térképen a felsorolt helyeket!
e) Miről készült a grafikon?

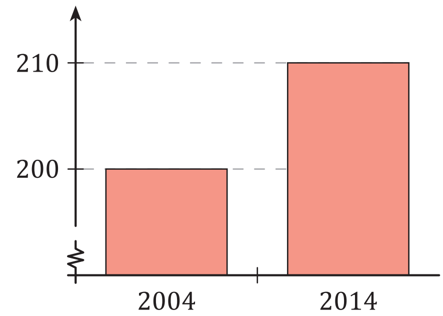
2. A táblázat a 2016-os olimpia éremtáblázatának első 12 helyezettjét mutatja. Ábrázold oszlopdiagramon az országok által nyert ezüstérmek számát! Ábrázold a Magyarország által szerzett arany-, ezüst- és bronzérmek számát kördiagramon!

Ország	Aranyérem	Ezüstérem	Bronzérem
Egyesült Államok	46	37	38
Nagy-Britannia	27	23	17
Kína	26	18	26
Oroszország	19	18	19
Németország	17	10	15
Japán	12	8	21
Franciaország	10	18	14
Dél-Korea	9	3	9
Olaszország	8	12	8
Ausztrália	8	11	10
Hollandia	8	7	4
Magyarország	8	3	4

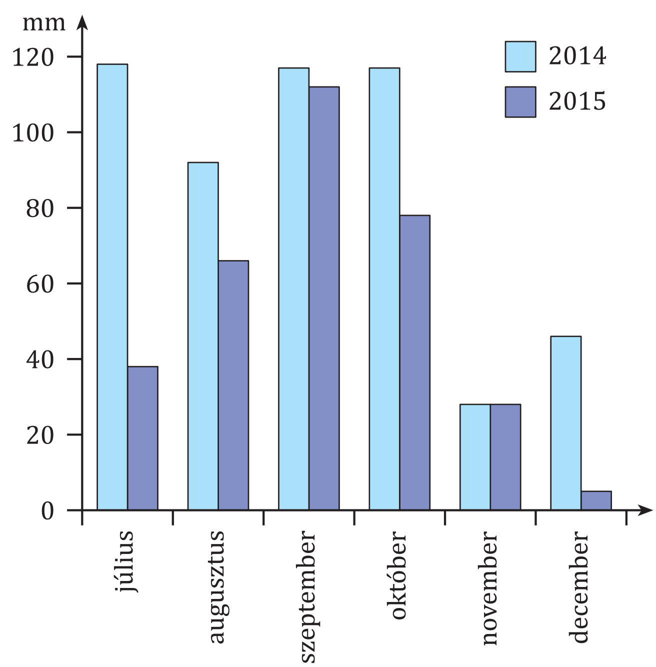
3. A grafikon a tanulók által kötött biztosítások számát ábrázolja 2004-ben és 2014-ben. Döntsd el, hogy melyik állítás igaz!

a) A biztosítások száma körülbelül kétszeresére nőtt.
b) A biztosítások számának változását látjuk 10 év alatt.
c) Az iskolába járó fiúk és lányok számát láthatjuk.
d) A biztosítások száma körülbelül 5%-kal nőtt.

Beszéljétek meg a tanulságokat!



4. A diagram 2014 és 2015 második fél évében mért havi csapadékmennyiségeket mutatja.



a) Melyik év második fele volt csapadékosabb?
b) Melyik hónapban volt a legkisebb, illetve a legnagyobb a különbség a 2014-ben és a 2015-ben lehullott csapadék mennyisége között?
c) A diagram alapján becsüld meg az egyes havi csapadékmennyiségeket, és a becsült értékeket használva számold ki a havi átlagos csapadék mennyiségét a megadott 6-6 hónapra!
d) Körülbelül hány mm csapadékkal esett kevesebb 2015 második felében, mint 2014 hasonló időszakában? Meg lehet mondani a különbséget pontosan?
e) Másold át az oszlopdiagramot a füzetedbe! Pirossal rajzold rá a 2014-es adatokhoz tartozó, zölddel pedig a 2015-ös adatokhoz tartozó vonaldiagramot! Szebb eredményt kapsz, ha nem szabad kézzel, hanem a vonalzódat használva rajzolsz?

Csoportmunka

A táblázat a *Toldi* második énekében található betűk darabszámát tartalmazza. (A kettős betűket külön számoltuk, azaz például a táblázatban az sz egy darab s-et és egy darab z-t jelent.) Összeszámoltuk a magánhangzók és a mássalhangzók számát, és beírtuk a táblázatba. A kérdések megválaszolásához használjatok zsebszámológépet vagy a mobiltelefon számológép funkcióját!

a	á	b	c	d	e	é
324	121	84	37	93	333	137
f	g	h	i	í	j	k
42	153	69	143	16	75	159
l	m	n	o	ó	ö	ő
200	142	257	139	29	66	28
p	q	r	s	t	u	ú
33	0	154	235	257	29	26
ü	ű	v	w	x	y	z
17	8	70	0	0	123	125

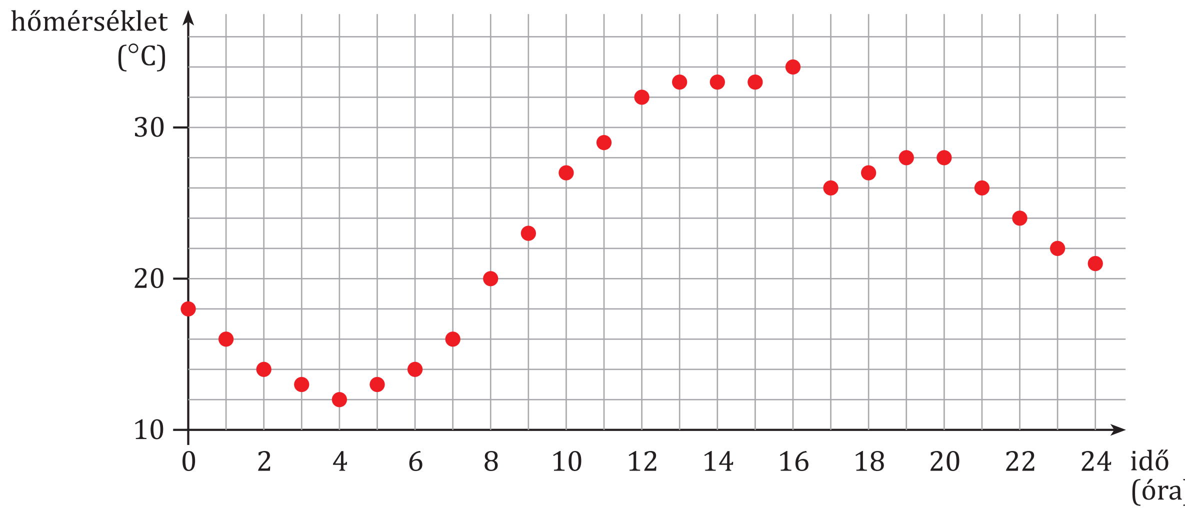
a) A betűk hányad része magán-, illetve mássalhangzó? Írjátok fel százalékos alakban is!

	Magánhangzó	Mássalhangzó	Összesen
Darabszám	1416	2308	3724
Hányad része az összesnek			1
Százalékban			100%

b) Ábrázoljátok a magán- és mássalhangzók számát oszlopdiagramon és kördiagramon!
c) Hasonlítsátok össze a kapott adatokat a negyedik lecke első példájában kapott eredménnyel!
d) Mit gondoltok, milyen százalékos értékeket kapnátok a magánhangzók és mássalhangzók számára vonatkozóan a Toldi harmadik énekének adatai alapján?
e) Vajon ugyanilyen eloszlást kapnátok-e, ha Quetzalcóatl (ejtsd: kezalkóatl), az azték mitológiában a tudás és a tanulás istene lenne a vizsgált szöveg főszereplője?

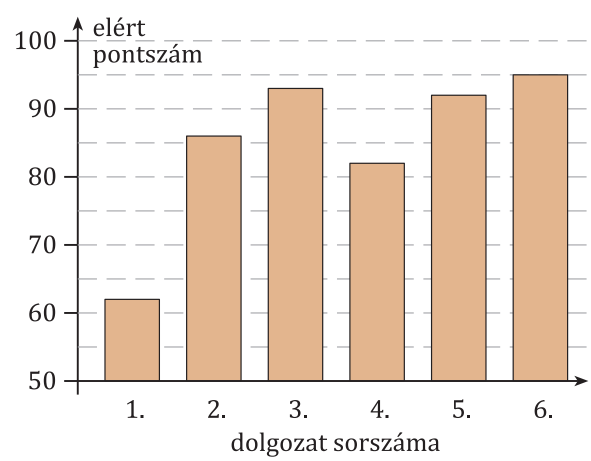
Feladatok

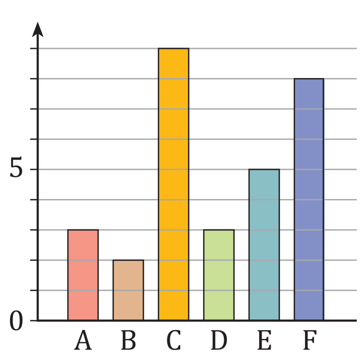
1. A grafikon a hőmérséklet alakulását mutatja egy nyári napon, óránként.
A grafikon alapján válaszolj a kérdésekre!



a) Hány órakor volt a leghidegebb?
b) Mikor volt 27 °C a hőmérséklet?
c) A nap melyik órájában volt a legnagyobb hőmérséklet-változás? Mit gondolsz, mi okozhatta?
d) Reggel 6 óra és 10 óra között hány °C-kal emelkedett a hőmérséklet?

2. Panni hat dolgozatot írt matekból az év során. Minden dolgozat legfeljebb 100 pontos lehetett. A dolgozatok pontszámait a diagramon láthatod.
a) Hányadik dolgozata lett a legrosszabb?
b) A 85 pont feletti dolgozatokra kapott ötöst. Hányadik dolgozata lett ötös?
c) Hányadik dolgozata lett a legjobb?
d) Hány pont a dolgozatainak az átlaga?





3. A diagram az állatkertben élő csimpánzok, elefántok, gorillák, orrszarvúak, vízilovak és zsiráfok számát ábrázolja.
A zsiráfok száma háromszorosa az elefántok számának. Annyi gorilla él az állatkertben, mint víziló és orrszarvú összesen. Az állatkertben ugyanannyi elefánt él, mint orrszarvú. Akikről még nem esett szó, azok a csimpánzok, a felsoroltak között ők alkotják a második legnagyobb családot.
Készíts kördiagramot hasonló színekkel, és a betűk helyett az állatok fajtáit írd bele!

4. A víz árának összetevőit a táblázatban láthatod. Az elhasznált víz mennyiségét egy vízórával mérik. A csatornadíjat annyi köbméter után kell fizetni, mint amennyi az elhasznált víz mennyisége.

Ivóvíz		Csatorna	
Alapdíj, amit minden hónapban fizetni kell (Ft)	Az elfogyasztott víz ára (Ft/m^3)	Alapdíj, amit minden hónapban fizetni kell (Ft)	A csatornahálózatba engedett szennyezett víz költsége (Ft/m^3)
250	220	300	260

A következő táblázat havi bontásban mutatja két család vízfogyasztását.

Hónapok	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kis család (m^3)	8	8	7	7	6	4	2	2	4	6	8	10
Nagy család (m^3)	12	14	14	12	17	18	22	24	18	10	8	11

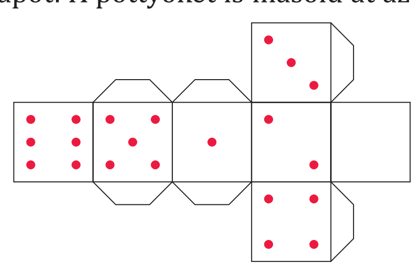
a) Mennyi vizet fogyasztott a Kis és a Nagy család egy év alatt?
b) Mennyi volt a családok átlagos havi vízfogyasztása és számlája, ha minden hónapban az átlagos értéket kellett fizetniük?
c) Készíts pont- és vonaldiagramot a két család havi vízfogyasztásáról!

5. Panni összegyűjtötte, hogy az osztálytársai milyen járművel érkeznek az iskolába.

Gyalog	Bicikli	Helyi járat (busz/villamos/metró…)	Távolsági járat busz/vonat	Autó
卌 ||||	||	卌 卌 |	||	卌 |||

Készíts az adatok alapján pont-, oszlop- és kördiagramot!
Készítsd el a diagramokat a saját osztályod adatai alapján is!

6. Rajzold le egy kartonpapírra az alábbi ábrát! Vágd ki, és ragassz belőle egy kockát! A kettes melletti üres lapot hajtsd belülre, és erre ragaszd a 6 pöttyös lapot! A pöttyöket is másold át az ábra szerint!



a) Mit gondolsz, ezt a kockát eldobva melyik lesz a leggyakrabban előforduló szám?
b) Dobjatok 20-szor a most készített papírkockátokkal! Készítsetek táblázatot az egyes dobások gyakoriságáról! Melyik szám lett a leggyakoribb?
c) Ábrázoljátok a saját adataitokat pont- és oszlopdiagramon!
d) Összesítsétek az osztályban a dobások eredményeit! Készítsetek táblázatot az eredményekből! Melyik lett a leggyakoribb dobott szám?
e) Ábrázoljátok az összesített adatokat vonaldiagramon!
f) Hogyan tudnátok olyan kockát készíteni, amelyen a 6 sokkal többször jön ki, mint a többi szám?
g) Végezzétek el a kísérletet egy szabályos dobókockával is! Válaszoljátok meg a *b)*, *c)*, *d)*, *e)* kérdéseket ebben az esetben is!